

3 руб. Пер. 40 коп. НТ1.

Р. КУРАНТ

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

1931

Р. КУРАНТ

КУРС
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
И ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ

★

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

★

П-ревод с немецкого
Ю. РАБИНОВИЧА и Б. ЛИВШИЦА



1 9 3 1



ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД

VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL UND INTEGRALRECHNUNG

VON
R. COURANT

★

ZWEITER BAND
FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHEN

★

Уполномоченный Главлита Б-3535. НТ-1. ГНТИ № 2140. 22 п. л. Тир. 80000. Заказ 2250. Декабрь 1931 г.

1-я типография Огиза РСФСР „Образцовая“ Москва, Валуевая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Первая глава.

Краткий обзор основных понятий аналитической геометрии и векторного исчисления.

Стр.

§ 1. Прямоугольные координаты и векторы 9

Системы координат — 9. Направления и векторы. Преобразование координат — 11. Умножение векторов — 14. Уравнения прямой и плоскости — 15.

§ 2. Площадь треугольника, объем тетраэдра и векторное произведение 18

Площадь треугольника и объем тетраэдра — 18. Векторное умножение двух векторов — 20.

§ 3. Простейшие свойства определителей второго и третьего порядка 21

Законы составления и главные свойства — 21. Применение к линейным уравнениям — 26.

§ 4. Аффинные преобразования и теорема умножения определителей 28

Аффинное преобразование плоскости и пространства — 28. Умножение аффинных преобразований. Приведение общего аффинного преобразования к простейшему виду — 31. Геометрическое значение определителя преобразования и теорема умножения определителей — 34.

Вторая глава.

Функции от многих переменных и их производные.

§ 1. Понятие функции от многих переменных 39

Функции и области, в которых они заданы — 39. Простейшие типы функций — 43. Геометрическая интерпретация функций — 43.

§ 2. Непрерывность 46

Определение — 46. Понятие предела для случая нескольких непрерывных переменных — 47. Примеры точек разрыва — 48. Порядок обращения функции в нуль — 50.

§ 3. Производные от функций многих переменных 52

Определение. Геометрическая интерпретация — 52. Существование частных производных по x и y и непрерывность — 56. Изменение порядка дифференцирования — 57.

§ 4. Полный дифференциал функции и его геометрическое значение 60

Понятие дифференцируемости — 60. Дифференцирование по данному направлению — 63. Геометрическое истолкование. Касательная плоскость — 65. Полный дифференциал функции — 66. Применение к теории ошибок — 68.

§ 5. Сложные функции и их производные 69

Общие замечания. Правило дифференцирования сложных функций — 69. Примеры — 72.

§ 6. Теорема о среднем значении и формула Тейлора для функций от многих переменных . . 74

Постановка проблемы и предварительные замечания — 74. Теорема о среднем значении — 75. Формула Тейлора для функций от многих переменных — 76.

§ 7. Применения понятия вектора 77

Поля и семейства векторов — 77. Применение к теории кривизны пространственных кривых. Разложение ускорения на тангенциальное и нормальное — 80. Градиент скаляра — 82. Ротор и дивергенция векторного поля — 84.

Дополнения ко второй главе.

§ 1. Принцип предельных точек для случая многих измерений и его применения 86

Формулировка принципа предельных точек — 86. Некоторые понятия из теории точечных множеств — 88. Теорема о покрытии — 89.

§ 2. Более подробное исследование понятия предела в случае многих переменных 90

Двойные последовательности и их пределы — 90. Двойной предельный переход для случая непрерывных переменных — 94. Теорема Дини о равномерной сходимости монотонных последовательностей функций — 95.

§ 3. Однородные функции 96

Третья глава.

Построение дифференциального исчисления и его применения.

§ 1. неявные функции 99

Общие замечания — 99. Геометрическая интерпретация — 100. Дифференцирование неявных функций — 101. Примеры — 103. Случай, когда число переменных больше двух — 104. Доказательство существования и непрерывности неявных функций — 106.

§ 2. Уравнения кривых в неявном виде 108

Уравнения плоских кривых в неявном виде — 108. Особые точки кривой — 112. Уравнение поверхности в неявном виде — 113.

§ 3. Системы функций, преобразования и отображения	115
Общие замечания — 115. Криволинейные координаты — 119. Обобщение на случай многих переменных — 121. Формулы дифференцирования обратных функций — 123. Разложение и умножение преобразований — 125.	
Общая теорема об обратимости преобразований — 130. Зависимые функции — 131. Заключительное замечание — 133.	
§ 4. Приложения	133
Теория поверхностей — 133.	
§ 5. Семейства кривых, семейства поверхностей и их огибающие	138
Общие замечания — 138. Огибающая семейства кривых, зависящего от одного параметра — 139. Примеры — 141. Огибающая семейства поверхностей — 145.	
§ 6. Наибольшие и наименьшие значения	147
Необходимые условия — 147. Примеры — 150. Относительные maxima и minima — 152. Доказательство правила множителей для простейшего случая — 155. Обобщение правила множителей — 156. Примеры — 161.	

Дополнения к третьей главе.

§ 1. Достаточные условия экстремума	163
§ 2. Особые точки плоских кривых	168

Четвертая глава.

Интегралы функций от многих переменных.

§ 1. Обыкновенные интегралы как функции параметра	171
Примеры и определения — 171. Непрерывность и дифференцируемость интегралов как функций параметра — 173.	
§ 2. Интеграл непрерывной функции по плоской или пространственной области	177
Интеграл по области как объем — 177. Общее аналитическое определение понятия интеграла — 178. Примеры — 181. Обозначения, дополнения, основные правила — 183. Оценка интегралов и теорема о среднем значении — 185. Интегралы, распространенные на трехмерные и многомерные области — 187. Дифференцирование по области. Масса и плотность — 188.	
§ 3. Вычисление интеграла, взятого по области с помощью обыкновенных интегралов	189
Случай прямоугольника — 190. Следствия — 193. Распространение результата на области более общего характера — 194. Распространение результатов на многомерные области — 197.	

§ 4. Преобразование интегралов, взятых по области	198
Введение полярных координат в плоскости — 198. Общая формула преобразования в случае двух независимых переменных — 200. Области, число измерений которых больше двух — 205.	
§ 5. Несобственные интегралы	206
Функции с конечными разрывами — 207. Функции, обращающиеся в бесконечность в изолированных точках — 207. Функции, обращающиеся в бесконечность вдоль линий — 211. Бесконечная область интегрирования — 211. Общие замечания и дополнения — 212.	
§ 6. Применения к геометрии	214
Вычисление объемов — 214. Общие замечания относительно вычисления объемов. Тела вращения. Объем в полярных координатах — 216. Площади кривых поверхностей — 218.	
§ 7. Применения к физике	224
Статический момент и центр тяжести — 224. Момент инерции — 227. Потенциал притягивающих масс — 228.	

Дополнения к четвертой главе.

§ 1. Существование интеграла, взятого по области	231
О площади двумерных плоских областей и объеме трехмерных областей — 231. Теорема о гл ких дугах кривых — 234. Доказательство существования интеграла по области от непрерывной функции — 236.	
§ 2. Несобственные интегралы как функции параметра	237
Равномерная сходимость. Интеграл как непрерывная функция параметра — 237. Интегрирование и дифференцирование по параметру несобственных интегралов — 241. Примеры — 243.	
§ 3. Об определении площади кривой поверхности	248

Пятая глава.

Интегрирование в многомерных областях. Продолжение.

§ 1. Криволинейные интегралы	250
Определение криволинейного интеграла. Обозначения. Основные правила — 250. Механическое истолкование криволинейного интеграла — 255. Интегрирование полных дифференциалов — 255. Основная теорема о криволинейных интегралах — 257. Значение условия односвязности — 263.	
§ 2. Связь между криволинейными интегралами и интегралами, распространенными на двумерную область в плоскости (теоремы Гаусса, Стокса и Грина)	264
Формулировка и доказательство теоремы Гаусса — 264. Векторная формулировка теоремы Гаусса. Теорема Стокса — 266. Формулы Грина. Интеграл от функционального определителя — 268.	

§ 3. Наглядная интерпретация и приложения теорем Гаусса и Стокса на плоскости 271

Интерпретация теоремы Гаусса — 271. Интерпретация теоремы Стокса — 273. Преобразование двойных интегралов — 275.

§ 4. Интегралы, распространенные по поверхности . 276

Ориентированные области и распространенные по ним двойные интегралы — 276. О разделении интеграла, распространенного по поверхности в пространстве — 282. Физическая интерпретация интеграла, распространенного по поверхности — 285. Объем, ограниченный замкнутой поверхностью — 285.

§ 5. Теоремы Гаусса и Грина в пространстве 287

Теорема Гаусса и ее физическое значение — 287. Теоремы Грина — 292.

§ 6. Теорема Стокса в пространстве 293

Формулировка и доказательство — 293. Физическое значение теоремы Стокса — 296.

§ 7. Замечания общего характера относительно связи между дифференцированием и интегрированием для случая многих переменных 297

Дополнения к пятой главе.

§ 1. Замечания к теоремам Стокса и Гаусса 300

§ 2. Изображение векторного поля, не имеющего источников в виде ротора 302

Шестая глава.

Применения к дифференциальным уравнениям.

§ 1. Дифференциальные уравнения механики материальной точки , 305

Уравнения движения — 305. Принцип сохранения энергии — 307. Равновесие — 308.

§ 2. Примеры из механики материальной точки . . . 310

Падение под углом к горизонту — 310. Небольшие колебания около положения равновесия — 312. Движение планет — 315.

§ 3. Дальнейшие примеры интегрирования дифференциальных уравнений 320

Общее линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка — 320. Простейший случай вынужденного колебания системы — 322. Негармонические колебательные системы. Комбинированные тоны — 323.

§ 4. Замечания общего характера относительно дифференциальных уравнений	328
Дифференциальное уравнение 1-го порядка и его геометрическое истолкование — 328. Дифференциальное уравнение семейства кривых. Особые решения — 330. Системы дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения высших порядков — 332. Интегрирование с помощью степенных рядов — 333.	
§ 5. Потенциал притягивающих электрических масс	334
Потенциал непрерывно распределенной массы — 334. Дифференциальное уравнение потенциала — 338. Однородный двойной слой — 339. Теорема о среднем значении — 342.	
Предметный указатель	344

ГЛАВА I.

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Математические факты, которые мы будем рассматривать во второй части этого курса, можно будет во многих случаях наглядно иллюстрировать и применять с помощью простых понятий аналитической геометрии и векторного исчисления. Поэтому, хотя я и могу предполагать наличие известных предварительных сведений в этих областях у большинства читателей, мне кажется все же целесообразным изложить вкратце во вводной главе простейшие, относящиеся сюда факты. Изучать однако эту главу до чтения остальной части книги не следует; я бы посоветовал читателю возвращаться к содержащемуся в этой главе материалу лишь при чтении дальнейших отделов по мере надобности.

§ 1. Прямоугольные координаты и векторы.

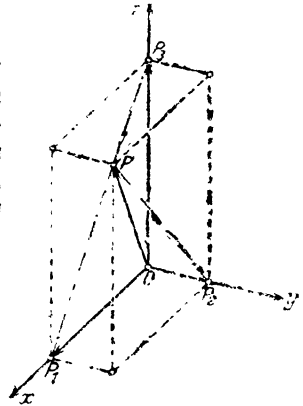
1. Системы координат. Для определения положения точек на плоскости или в пространстве пользуются обычно прямоугольной системой координат. На плоскости мы выбираем две, в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые: ось x и ось y , соответственно ось x , ось y и ось z . На каждой оси кладут в основу одну и ту же единицу длины, и каждой точке плоскости или пространства приводят обычным способом в соответствие координаты x и y или, соответственно, координаты x, y, z . Обратно, каждой системе значений (x, y) , или (x, y, z) соответствует одна единственная точка на плоскости или в пространстве. Всякая точка вполне определяется своими координатами.

На основании теоремы Пифагора мы легко получаем следующую формулу для расстояния r между двумя точками с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 или соответственно x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 :

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

или соответственно:

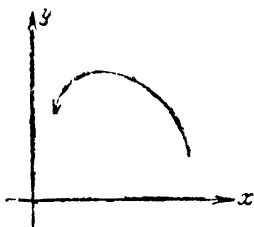
$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$



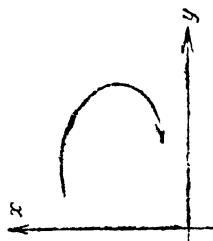
Черт. 1. Система координат в пространстве.

При выборе прямоугольной системы координат мы должны, имея в виду дальнейшие более тонкие исследования, обращать особенное внимание на так называемую ориентировку системы координат.

В первом томе (гл V, § 2, 1) мы указали на отличие между положительным и отрицательным направлением обхода на плоскости. Рассмотрим



Черт. 2. Правая система.

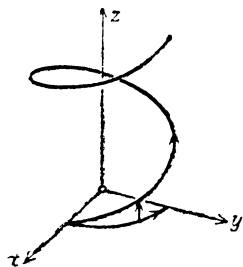
Черт. 3.
Левая система.

то направление вращения или обхода, которое определяется поворотом на 90° положительной оси x плоской системы координат, при котором эта ось кратчайшим путем переходит в положительную ось y . В зависимости от того, будет ли это направление вращения положительным или отрицательным, мы будем систему координат называть положительной (правой) или отрицательной (левой) системой (черт. 2 и 3).

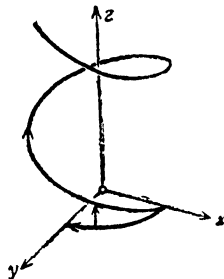
Оставаясь на плоскости, мы не можем никаким движением в этой плоскости привести положительную систему к совпадению с отрицательной системой.

Совершенно аналогичное разграничение мы можем установить и для пространственных систем координат. Вообразив себя стоящим на плоскости xOy головою в сторону положительной оси Oz , мы можем отличать системы координат по той ориентировке, которую имеет относительно стоящего вышеупомянутым образом наблюдателя система координат в плоскости xOy . Если эта система положительна, то мы и пространственную систему

будем называть положительной, в противном случае мы и пространственную систему будем называть отрицательной (черт. 4 и 5).



Черт. 4. Правый винт.



Наглядным примером положительной системы может служить обыкновенный правый винт; а именно, если привести плоскость xOy в движение, состоящее из вращения плоскости в самой себе — в направлении, установленном ее ориентировкой — и из одновременного

Черт. 5. Левый винт.

переноса по направлению положительной оси Oz , то для положительной системы это движение будет движением правого винта, а для отрицательной системы движением левого винта. Никаким движением нельзя отрицательную систему совместить с положительной системой. В дальнейшем мы будем всегда употреблять только положительные системы координат.

Совершенно таким же способом, как мы только что поступили для прямоугольной системы координат $Oxyz$, мы можем, разумеется, приписать определенную ориентировку любым трем осям, проходящим через одну точку.

2. Направления и векторы. Преобразование координат. Всякая ориентированная, т. е. направленная в определенную сторону, прямая l в пространстве или на плоскости изображает некоторое направление. Всякую другую ориентированную прямую, которую можно путем параллельного перемещения привести к совпадению с прямой l , сохраняя при этом ее ориентировку, мы считаем представительницей того же направления. Всякое направление определяется обычно по отношению к данной системе координат тем, что через начало системы координат проводится в том же направлении ориентированная прямая, и на ней на расстоянии, равном 1, берется точка с координатами α , β и γ . Числа α , β и γ называются направляющими косинусами данного направления. Они являются косинусами трех углов δ_1 , δ_2 и δ_3 , образуемых ориентированной прямой l с положительными осями Ox , Oy и Oz ¹⁾, и удовлетворяют, согласно нашей формуле расстояния, соотношению:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

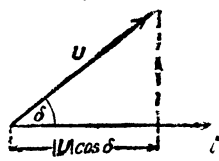
Если ограничиться плоскостью Oxy , то всякое направление определяется углами δ_1 , δ_2 , образуемыми ориентированной прямой l , проведенной в данном направлении через начало координат, с положительными осями Ox и Oy ; или же косинусами этих углов $\alpha = \cos \delta_1$, $\beta = \cos \delta_2$, удовлетворяющими уравнению:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Отрезок данной длины и данного направления мы называем вектором; точнее — связанным вектором, если начальная точка имеет фиксированное положение в пространстве, и свободным вектором, если положение начальной точки является безразличным. В дальнейшем мы в большинстве случаев будем опускать прилагательные „свободный“ и „связанный“ и будем всегда считать векторы свободными, если только не будет сделана особая оговорка. Мы будем обозначать векторы жирным латинским шрифтом: a , b , c , x , A . Два вектора считаются равными, если можно путем параллельного перемещения совместить один вектор с другим. Длину вектора v мы также называем его модулем и обозначаем через $|v|$.

Если из начальной и конечной точки вектора опустить перпендикуляры на ориентированную прямую l , то мы получаем на l соответствующий вектору ориентированный отрезок. Если ориентировка этого отрезка совпадает с ориентировкой прямой l , то длина этого отрезка называется компонентой вектора v по направлению l ; если же обе ориентировки противоположны, то под компонентой v по направлению l мы подразумеваем длину этого отрезка, взятую со знаком минус. Если δ означает угол между направлением v и направлением l (черт. 6), то, обозначая через v_l компоненту вектора v по направлению l , мы получаем в обоих случаях:

$$v_l = |v| \cos \delta.$$



Черт. 6.
Проекция вектора.

¹⁾ Под углом, образуемым одной ориентированной прямой с другой, можно всегда подразумевать угол, содержащийся между 0 и π , так как в дальнейшем придется иметь дело только с косинусами этих углов.

Вектор v длины, равной единице, называется **единичным вектором**; его компонента по направлению l равна косинусу угла между l и v . Компоненты вектора v по направлению трех осей некоторой системы координат мы обозначаем через v_1, v_2, v_3 . Перенеся начало вектора v в начало координат, мы убеждаемся в справедливости равенства:

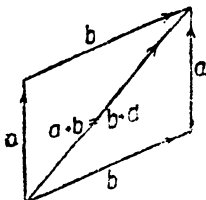
$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Если α, β и γ — направляющие косинусы направления v , то имеем:

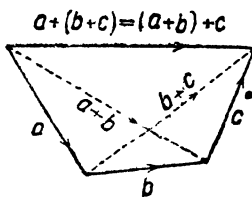
$$v_1 = |v|\alpha, \quad v_2 = |v|\beta, \quad v_3 = |v|\gamma.$$

Свободный вектор вполне определяется своими компонентами v_1, v_2, v_3 .

Употребление векторов является выгодным и естественным по двум различным причинам. С одной стороны, многочисленные геометрические и в особенности физические понятия, как например сила, скорость, ускорение, могут быть непосредственно представлены в виде векторов, и этот способ изображения не зависит от положенной в основу системы координат; с дру-



Черт. 7.



Черт. 8.

гой стороны, действия над векторами производятся согласно простым правилам, аналогичным правилам действий над числами, и при помощи этих векторных операций многие рассуждения и выкладки значительно упрощаются и могут проводиться в форме, независимой от случайно выбранной системы координат.

Определим сначала сумму двух векторов a и b ; для этой цели переместим вектор b параллельно самому себе так, чтобы его начальная точка совпала с конечной точкой вектора a . Тогда начальная точка вектора a и конечная точка вектора b определяют новый вектор c , начальная точка которого совпадает с начальной точкой a , а конечная точка — с конечной точкой b ; мы называем c суммой a и b и пишем:

$$a + b = c$$

При этом, очевидно, имеют место: закон переместительности:

$$a + b = b + a,$$

и закон сочетательности:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c,$$

как это непосредственно следует из черт. 7 и 8.

Из определения вектора непосредственно следует теорема о проекциях, состоящая в том, что компонента суммы двух или нескольких векторов по направлению l равна сумме компонент составляющих векторов по этому направлению:

$$(a + b)_l = a_l + b_l.$$

В частности компоненты $a + b$ по направлению осей координат равны

$$a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad a_3 + b_3.$$

Всякую точку P с координатами x, y, z мы можем определить с помощью радиуса-вектора, имеющего начало в начале координат и конец в точке P и компонентами которого являются координаты точки P .

Исходя из этого замечания, мы получаем очень просто с помощью только что сформулированной теоремы о проекциях формулы преобразования координат, выражающие координаты заданной точки P в системе координат $Ox'y'z'$ с помощью координат P в системе $Oxyz$, предполагая, что обе системы имеют общее начало O , так что одна получается из другой поворотом вокруг точки O . Три новые оси образуют со старыми осями углы, косинусы которых задаются следующей непосредственно понятной таблицей: так, например, γ_1 означает косинус угла между осью Ox' и осью Oz и т. д.

	x	y	z
x'	a_1	β_1	γ_1
y'	a_2	β_2	γ_2
z'	a_3	β_3	γ_3

Опустим из точки P перпендикуляры на оси Ox, Oy и Oz с основаниями P_1, P_2, P_3 . Вектор, ведущий из O в P , равен сумме векторов, ведущих из O в P_1 , из O в P_2 и из O в P_3 . Направляющие косинусы оси Ox' в системе $Oxyz$ суть a_1, β_1, γ_1 , оси $Oy' — a_2, \beta_2, \gamma_2$; оси $Oz' — a_3, \beta_3, \gamma_3$.

Согласно теореме о проекциях, мы получим для компоненты x' вектора \overrightarrow{OP} по направлению оси Ox' :

$$x' = a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z.$$

Точно так же:

$$y' = a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$

$$z' = a_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Так как компоненты связанного вектора v по направлению осей выражаются формулами:

$$v_1 = x_2 - x_1,$$

$$v_2 = y_2 - y_1,$$

$$v_3 = z_2 - z_1,$$

где x_1, y_1, z_1 означают координаты начальной точки, а x_2, y_2, z_2 — координаты конечной точки v , то для компонент вектора имеют

место те же формулы преобразования, что и для координат:

$$\begin{aligned}v'_1 &= a_1 v_1 + \beta_1 v_2 + \gamma_1 v_3, \\v'_2 &= a_2 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma_2 v_3, \\v'_3 &= a_3 v_1 + \beta_3 v_2 + \gamma_3 v_3.\end{aligned}$$

3. Умножение векторов. Соответственно определению сложения векторов мы подразумеваем под произведением вектора v на число c тот вектор, который по направлению совпадает с v ¹⁾ и имеет длину $c|v|$; другими словами — вектор c компонентами cv_1, cv_2, cv_3 .

Мы можем также определить произведение двух векторов x и y , причем это „умножение“ векторов подчиняется законам действий, аналогичным законам обыкновенного умножения. Введем сначала более простое и более важное для нас скалярное (или внутреннее) умножение векторов x и y с помощью следующего определения:

Скалярным или внутренним произведением xy векторов x и y мы называем произведение их модулей на косинус угла δ между их направлениями:

$$xy = |x| |y| \cos \delta.$$

Это произведение является не чем иным, как компонентой одного вектора x по направлению другого вектора y , умноженной на модуль второго вектора.

Из теоремы о проекциях непосредственно следует закон распределительности:

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Закон переместительности умножения:

$$xy = yx$$

непосредственно следует из определения.

Но при этом скалярное умножение векторов отличается от обыкновенного умножения чисел существенно тем, что произведение может равняться нулю без того, чтобы один из множителей равнялся нулю. Именно, произведение xy обращается в нуль всякий раз, когда оба вектора x и y взаимно перпендикулярны.

Чтобы получить выражение скалярного произведения с помощью компонент, представим себе, что векторы x и y имеют начало в начале координат. Пусть компоненты этих векторов по направлению осей координат суть x_1, x_2, x_3 и соответственно y_1, y_2, y_3 , так что

$$x = x_1 + x_2 + x_3; \quad y = y_1 + y_2 + y_3,$$

где x_1, x_2, x_3 и соответственно y_1, y_2, y_3 означают параллельные осям координат составляющие векторов x и y .

В произведении

$$xy = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

¹⁾ Или прямо противоположен вектору v при $c < 0$.

мы можем в правой части произвести умножение согласно приведенным выше законам действий, но произведения

$$x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_3, x_3y_1 \text{ и } x_3y_2$$

равны нулю, так как их множители взаимно перпендикулярны; мы получаем поэтому:

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Множители стоящих справа произведений имеют попарно одинаковое направление, а потому согласно определению $x_1y_1 = x_1y_1$ и т. д.

Отсюда получаем:

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Эту формулу можно было бы с самого начала взять в качестве определения скалярного произведения. Если в частности x и y являются единичными векторами с направляющими косинусами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, то скалярное произведение будет равняться косинусу угла δ , образуемого векторами x и y , и мы получаем поэтому для косинуса угла между двумя векторами формулу:

$$\cos \delta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Физическое значение скалярного произведения выражается например в том факте, известном уже из элементарной механики, что сила k , перемещающая материальную точку вдоль вектора v , совершает при этом работу kv .

4. Уравнения прямой и плоскости. Пусть дана прямая на плоскости Ox_1y_1 или плоскость в пространстве $Ox_1y_1z_1$. Чтобы получить ее уравнение, мы восставим к ней перпендикуляр и выберем одно определенное, перпендикулярное к прямой или плоскости направление в качестве положительного направления нормали; какое из двух возможных направлений мы считаем при этом положительным, является безразличным. Обозначим через n единичный вектор, направленный по положительной нормали; точки прямой или плоскости характеризуются тем, что ведущий к ним из начала координат радиус-вектор имеет постоянную проекцию на направление нормали, или что скалярное произведение радиуса-вектора на нормальный вектор n равно p , где $|p|$ есть расстояние начала координат от прямой или плоскости. Если α, β или соответственно α, β, γ означают направляющие косинусы положительного направления нормали, т. е. компоненты n , то мы получаем, что уравнения

$$ax + by - p = 0,$$

или соответственно

$$ax + by + \gamma z - p = 0$$

представляют собою искомые уравнения заданной прямой или плоскости. Обратно, если заданные числа α, β или α, β, γ являются направляющими косинусами, то наши уравнения изображают прямую или плоскость с заданными направляющими косинусами нормали и находящуюся на расстоянии $|p|$ от начала координат.

Выражение

$$ax + \beta y - p \text{ или } ax + \beta y + \gamma z - p,$$

стоящее в левой части уравнения прямой или плоскости, называется нормальной формой Гессе уравнения прямой или плоскости и имеет определенное геометрическое значение и для точек P , не лежащих на данной прямой или плоскости

Так как

$$ax + \beta y \text{ или } ax + \beta y + \gamma z$$

являются проекциями радиуса-вектора \overrightarrow{OP} на направление нормали, то отсюда непосредственно следует, что выражение

$$ax + \beta y - p \text{ или } ax + \beta y + \gamma z - p$$

означает отсчитываемое по перпендикуляру расстояние точки P от прямой или плоскости, которое при этом берется со знаком плюс для точек, лежащих по одну сторону — в сторону положительной нормали — и со знаком минус для точек, лежащих по другую сторону прямой или плоскости.

Из нормальной формы Гессе уравнения прямой или плоскости мы получаем умножением на произвольный отличный от нуля множитель другие изображения прямой или плоскости. Обратно, если задано произвольное линейное уравнение

$$Ax + By + D = 0 \text{ или } Ax + By + Cz + D = 0,$$

то оно изображает прямую или плоскость, если только не обращаются в нуль все коэффициенты A , B или A , B и C , ибо, разделив например на

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

и положив

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$p = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

мы получим уравнение, изображающее согласно предыдущему плоскость с направляющими косинусами нормали α , β , γ и расстоянием $|p|$ от начала координат; то же относится и к уравнению прямой.

Прямую линию в пространстве можно характеризовать двумя произвольными плоскостями, проходящими через эту прямую. Таким образом для пространственной прямой получаются аналитически два линейных уравнения:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

которым удовлетворяют координаты x , y , z точек прямой. Так как через заданную прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей, то

это изображение пространственной прямой не является однозначно определенным.

Для аналитического изображения прямой удобнее во многих случаях пользоваться параметрическим видом уравнения, введя параметр t . Если рассмотреть три целые линейные функции от t :

$$x = a_1 + b_1 t,$$

$$y = a_2 + b_2 t,$$

$$z = a_3 + b_3 t,$$

то когда t пробегает числовую ось, точка (x, y, z) пробегает некоторую прямую, ибо, исключая t из двух пар уравнений, мы получаем для x, y, z два линейных уравнения.

Направляющие косинусы α, β, γ нашей прямой пропорциональны коэффициентам b_1, b_2, b_3 . В самом деле, эти направляющие косинусы пропорциональны разностям координат $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ двух точек прямой с координатами

$$x_1 = a_1 + b_1 t_1, \quad y_1 = a_2 + b_2 t_1, \quad z_1 = a_3 + b_3 t_1,$$

и

$$x_2 = a_1 + b_1 t_2, \quad y_2 = a_2 + b_2 t_2, \quad z_2 = a_3 + b_3 t_2.$$

Поэтому

$$\alpha = \rho b_1, \quad \beta = \rho b_2, \quad \gamma = \rho b_3.$$

Так как сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \beta = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \gamma = \frac{b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

причем двухзначность квадратного корня выражает тот факт, что на прямой можно выбрать какое-нибудь одно из двух противоположных направлений.

С помощью направляющих косинусов можно впрочем привести параметрическое изображение прямой к следующему виду:

$$x = x_0 + \alpha \tau,$$

$$y = y_0 + \beta \tau,$$

$$z = z_0 + \gamma \tau,$$

где x_0, y_0, z_0 есть произвольная точка на прямой; при этом новый параметр τ выражается через прежний параметр t с помощью хотя бы следующего уравнения:

$$x_0 + \alpha \tau = a_1 + b_1 t.$$

Так как

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \text{то} \quad \tau^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2;$$

таким образом τ по своему абсолютному значению равняется расстоянию между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) .

§ 2. Площадь треугольника, объем тетраэдра и векторное произведение.

1. Площадь треугольника и объем тетраэдра. Чтобы вычислить площадь треугольника, лежащего в плоскости Oxy , перенесем этот треугольник параллельно самому себе так, чтобы одна из его вершин совпала с началом O , а две другие P_1 и P_2 имели координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 . Напишем уравнение прямой, соединяющей O с P_1 , в нормальной форме:

$$\frac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} x + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} y = 0,$$

и мы получим для расстояния точки P_2 от этой прямой с точностью до знака следующее выражение:

$$\frac{-y_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Так как длина отрезка OP_1 равна $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, то, умножая „основание“ OP_1 на его расстояние от P_2 , мы получим, не считая знака, следующее выражение для двойной площади треугольника:

$$2F = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Это выражение может быть как положительным, так и отрицательным; оно меняет знак, если переставить между собою точки P_1 и P_2 . Мы теперь утверждаем следующее.

Выражение F положительно или отрицательно в зависимости от того, совпадает ли направление обхода $OP_1 P_2$ с направлением обхода системы координат или нет.

Вместо того, чтобы доказать это предложение путем анализа нашего вышеприведенного вывода формулы площади — что само по себе безусловно возможно, — мы предпочтем следующее рассуждение, опирающееся на понятие непрерывности: будем непрерывно изменять треугольник $OP_1 P_2$, непрерывно перемещая точки P_1 и P_2 ; если при этом перемещении выражение F не обращается в нуль, т. е. если треугольник ни разу не вытягивается в прямую линию, то F сохраняет неизменным свой знак. Тогда, если направление обхода треугольника совпадает с направлением обхода системы координат, то этим путем можно совместить точку P_1 с точкой $(1, 0)$, а точку P_2 — с точкой $(0, 1)$; причем F получит значение:

$$F = \frac{1}{2} (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = \frac{1}{2},$$

т. е. будет положительным; в противоположном случае можно P_1 привести в точку $(1, 0)$, а P_2 — в точку $(0, -1)$, и тогда для F получится отрицательное значение:

$$F = \frac{1}{2} [1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0] = -\frac{1}{2}.$$

Выражение $x_1 y_2 - x_2 y_1$, выражающее снабженную знаком двойную площадь треугольника, записывается обычно в следующем символическом виде:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

и называется определителем второго порядка.

Если одна из вершин треугольника не находится в начале координат, но занимает вообще положение (x_0, y_0) , то параллельное перемещение системы координат дает для площади треугольника выражение:

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным путем получается выражение для объема тетраэдра, одна вершина которого лежит в начале координат O , а три другие вершины которого, P_1, P_2, P_3 , имеют координаты $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ и x_3, y_3, z_3 .

Рассмотрим сначала плоскость E , проходящую через векторы OP_1 и OP_2 , ведущие из O в P_1 и P_2 , и лежащий в этой плоскости треугольник OP_1P_2 , имеющий площадь F . Чтобы получить уравнение плоскости E , заметим, что это уравнение должно иметь вид $ax + by + cz = 0$, причем отношения коэффициентов a, b, c определяются из условий, что точки P_1 и P_2 должны лежать в плоскости E , т. е. из обоих уравнений:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0,$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = 0.$$

Из этих уравнений мы получаем совершенно элементарным путем:

$$a:b:c = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 z_2 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix},$$

и отбрасывая фактор пропорциональности, мы можем написать уравнение плоскости в виде:

$$\begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_1 z_2 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix} z = 0.$$

Согласно выведенной выше формуле для площади треугольника мы получаем для площадей проекций треугольника OP_1P_2 на плоскости координат выражения:

$$F_{12} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix}, \quad F_{23} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{vmatrix}, \quad F_{31} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 z_2 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix}.$$

Так как площадь треугольника и площади его проекций F_{12}, F_{23}, F_{31} относятся между собой как единица относится к соответствующим направляющим косинусам нормали, то мы получаем для направляющих косинусов нормали плоскости E :

$$\alpha = \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} z_1 z_2 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix},$$

откуда мы получаем, принимая во внимание равенство

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

следующее выражение для площади OP_1P_2 :

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right|^2}.$$

Нормальная форма Гессе уравнения плоскости E имеет следовательно вид:

$$\frac{1}{2F} \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right| x + \frac{1}{2F} \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right| y + \frac{1}{2F} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| z = 0;$$

отсюда получается для высоты тетраэдра h , т. е. для расстояния точки P_3 от плоскости OP_1P_2 , выражение

$$h = \frac{1}{2F} \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right| x_3 + \frac{1}{2F} \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right| y_3 + \frac{1}{2F} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| z_3.$$

Умножая площадь основания F на $\frac{h}{3}$, мы окончательно получим иско-
мый объем тетраэдра:

$$v = \frac{1}{6} \left\{ x_3 \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right| + y_3 \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right| + z_3 \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| \right\}.$$

И здесь, так же как и раньше для площади треугольника, объем тетраэдра дается с определенным знаком, и оказывается, что этот знак положителен, если ориентировка осей OP_1 , OP_2 , OP_3 (зависящая от их порядка), совпадает с ориентировкой системы координат, и отрицателен в противоположном случае. Доказательство протекает совершенно так же, как и выше для площади треугольника. Встречающееся в наших формулах выражение

$$x_3 \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right| + y_3 \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right| + z_3 \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right|$$

мы сокращенно записываем с помощью символа:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

и называем определителем третьего порядка.

Таким образом, записывая подробно, имеем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 + x_2 y_3 z_1 - x_1 y_3 z_2 + x_1 y_2 z_3 - x_2 y_1 z_3.$$

Точно так же, как и для треугольника, мы получаем для объема тетраэдра, одна из вершин которого находится не в начале координат, а в точке (x_0, y_0, z_0) , выражение:

$$v = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

2. Векторное умножение двух векторов. Рассмотрения предыдущего номера тесно связаны с понятием так называемого векторного или

внешнего умножения двух векторов. Так как нам мало придется иметь дело с этой операцией, то мы можем ограничиться кратким указанием. Обозначим оба радиуса-вектора, ведущие из точки O в P_1 и P_2 , через a и b ; определяемый ими пространственный треугольник имеет площадь, равную по абсолютному значению выражению:

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Определим теперь в качестве векторного произведения векторов a и b тот вектор c , длина которого равна $2F$ и который направлен перпендикулярно к векторам a и b и притом так, чтобы векторы a , b и c , взятые в этой последовательности, составляли положительную (правую) систему.

Легко убедиться в том, что этот вектор имеет следующие три компоненты:

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

если система координат является положительной.

Для этого умножения векторов, которое, как мы заметим, в противоположность скалярному умножению приводит в соответствие каждой паре векторов в качестве их произведения уже не число, а третий вектор, обычно пишут:

$$a \times b = c,$$

и опять получают некоторые законы действий, оправдывающие термин „умножение“.

Однако закон переместительности уже не имеет места; наоборот,

$$a \times b = -b \times a,$$

т. е. при перемене мест сомножителей произведение умножается на -1 .

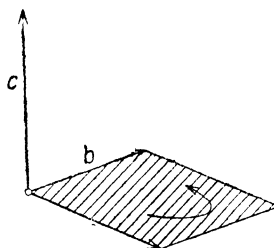
Закон же распределительности сохраняется, т. е.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

как в этом можно убедиться либо непосредственно на основании определения, либо еще проще, исходя из выражений компонент произведения.

Физически векторное произведение применяется например в понятии момента. Сила k , имеющая точкой приложения конец радиуса-вектора x , имеет относительно начала O момент

$$k \times x.$$



Черт. 9. Векторное произведение.

§ 3. Простейшие свойства определителей второго и третьего порядка.

1. Законы составления и главные свойства. Появляющиеся при вычислении площади треугольника и объема тетраэдра определители второго и третьего порядка и их обобщения — определители высших порядков — играют во всех областях математики очень важную роль, упрощая и делая

наглядными различные сложные вычисления. Мы выведем свойства определителей на частном случае определителей второго и третьего порядка, так как только такие определители нам понадобятся в дальнейшем.

Заметим при этом, что все наши основные теоремы при соответствующей формулировке справедливы и для определителей любого порядка; однако в отношении теории этих последних мы должны отослать к учебникам алгебры и теории определителей ¹⁾.

Определители

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

представляют собою выражения, составленные определенным образом из своих элементов a, b, c, d или $a, b, c, d, e, f, g, h, k$. Горизонтальные ряды (как например d, e, f) называются строками, а вертикальные ряды (например c, f, k) — столбцами определителя.

Относительно вычисления определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ничего добавить не приходится; для определителей третьего порядка приведем правило Сарруса, отчетливо выясняющее способ составления определителя:

За третьим столбцом пишут первые два столбца; затем составляют произведения из трех чисел, стоящих в одной прямой, наклоненной под углом в 45° к горизонталям, и умножают произведения, принадлежащие прямым, идущим слева и сверху вправо и вниз, на $+1$, а произведения, принадлежащие прямым, идущим слева и снизу вправо и вверх, умножаются на -1 . Складывая эти произведения, мы получаем значение определителя.

Этим путем мы получаем:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - afh - bdk.$$

Докажем несколько теорем относительно определителей:

1. Если в определителе заменить строки столбцами и столбцы строками, то определитель не меняет своего значения, т. е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}.$$

¹⁾ См. хотя бы G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909 и M. Bôcher, Höhere Algebra. Leipzig 1910.

Это следует непосредственно из вышестоящих выражений для определителей.

2. Если переставить между собою две строки или два столбца определителя, то определитель меняет свой знак, т. е. умножается на -1 .

Мы в этом легко можем убедиться, пользуясь вышеприведенными законами составления определителей, причем, согласно 1, достаточно доказать наше предложение для столбцов.

3. В § 2 мы ввели определители третьего порядка с помощью равенства:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Напишем это равенство, согласно 2, в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix};$$

тогда в стоящих справа определителях элементы расположены так же, как и в первоначальном определителе третьего порядка. Если переставить в левой части равенства последние два столбца между собою и написать ту же формулу, то мы получаем, принимая во внимание теорему 2:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix},$$

и точно таким же образом:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Мы называем эти три равенства разложениями определителя по элементам третьего, второго и первого столбца. Заменяя столбцы строками, от чего значение определителя, согласно теореме 1, не меняется, мы получим разложения по строкам;

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда непосредственно следует теорема:

4. Вместо того, чтобы умножить определитель на число ρ , достаточно умножить на ρ все элементы какой-нибудь строки или столбца.

Из теорем 2 и 4 мы заключаем:

5. Если элементы двух строк или двух столбцов определителя пропорциональны между собою, т. е. если каждый элемент одной строки или столбца равен соответствующему элементу другой строки или столбца, умноженному на один и тот же фактор пропорциональности ρ , то определитель равен нулю. В самом деле, согласно теореме 4 мы можем написать множитель ρ впереди определителя; если мы затем переставим между собою ряды, имеющие соответственно равные элементы, то значение определителя не изменится, тогда как согласно теореме 2 определитель меняет свой знак. Но это возможно лишь только тогда, когда значение определителя равно нулю.

Согласно этому, например определитель, у которого в какой-нибудь строке или столбце стоят исключительно нули, должен равняться нулю, что впрочем непосредственно следует из выражения определителя.

6. Сумма двух определителей одного и того же порядка, отличающихся друг от друга только элементами одного ряда (строки или столбца), равна определителю, в котором общие строки или столбцы данных двух определителей остаются неизменными, а элементы остающегося ряда равны суммам соответствующих элементов данных двух определителей.

Например:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & m & c \\ d & n & f \\ g & p & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+m & c \\ d & e+n & f \\ g & h+p & k \end{vmatrix}.$$

В самом деле, разлагая по элементам тех рядов, о которых идет речь, которые в нашем примере состоят из элементов b, e, h и m, n, p , и складывая, мы получаем выражение:

$$(-b-m) \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + (e+n) \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} + (-h-p) \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix},$$

которое, очевидно, представляет собою не что иное, как разложение определителя:

$$\begin{vmatrix} a & b+m & c \\ d & e+n & f \\ g & h+p & k \end{vmatrix}$$

по элементам ряда: $b+m, e+n, h+p$. Этим наше предложение доказано.

Для определителей второго порядка имеет место аналогичное рассуждение.

7. Во всяком определителе можно, не меняя его значения, прибавить к элементам одного ряда (столбца или

строки) соответствующие элементы какого-нибудь другого параллельного ряда, умноженные на какой-нибудь фактор пропорциональности.

Согласно теореме 6 получающийся таким путем определитель равен сумме первоначального определителя и определителя, в котором элементы двух параллельных рядов пропорциональны. Но, согласно теореме 5, этот второй определитель равен нулю¹⁾.

Следующие примеры поясняют применение этих теорем для вычисления определителей. Мы имеем например:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = ack,$$

как это например следует из правила Сарруса. Определитель, в котором только элементы, стоящие в главной диагонали, отличны от нуля, равен произведению этих элементов.

Вычисление определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{прибавляем элементы второй строки к элементам первой}),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{разложение по элементам первой строки}).$$

Таким образом

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

¹⁾ Исходя из наших разложений по элементам строк или столбцов, можно между прочим получить определители четвертого и высших порядков. Для схемы из 16 величин

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

мы называем определителем четвертого порядка выражение:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

и мы можем таким же образом последовательно получить определители пятого, шестого и высших порядков и ввести определители n -го порядка рекуррентным путем от $n-1$ к n . Оказывается, что все существенные свойства определителей второго и третьего порядка сохраняют свою справедливость и для определителей n -го порядка. Впрочем „правило Сарруса“ уже не имеет места для разложения определителей порядка выше третьего. Проведение этих рассмотрений однако выходит за пределы нашего курса.

Другой пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}.$$

Разлагая по элементам первого столбца, получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} = \\ = (y-x)(z-x)(z-y).$$

2. Применение к линейным уравнениям. Определители имеют фундаментальное значение для теории линейных уравнений. Чтобы решить относительно x и y уравнения:

$$\begin{aligned} ax + by &= A, \\ cx + dy &= B, \end{aligned}$$

мы сперва умножаем первое уравнение на c , а второе на a , затем — первое уравнение на d , а второе на b и вычитаем каждый раз второе уравнение из первого.

Мы получаем:

$$\begin{aligned} (bc - ad)y &= Ac - Ba, \\ (ad - bc)x &= Ad - Bb, \end{aligned}$$

или

$$x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}, \quad y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}.$$

Предположим, что определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

отличен от нуля; тогда из написанных уравнений непосредственно получаются формулы решения:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},$$

правильность которых можно проверить путем подстановки.

Если впрочем определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, и при этом один из определителей $\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то уравнения

$$x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}, \quad y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}$$

приводят к противоречию.

Мы получили таким образом следующий для нас особенно важный факт; система уравнений вышеуказанного вида, определитель которой отличен от нуля, всегда решается однозначно.

Если система уравнений однородна, т. е. если $A=B=0$, то из наших формул решения следует, что при $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, $x=0$, $y=0$.

Для трех уравнений с тремя неизвестными

$$ax + by + cz = A,$$

$$dx + ey + fz = B,$$

$$gx + hy + kz = C,$$

мы с помощью аналогичного приема приходим к подобному результату.

Мы умножаем первое уравнение на $\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}$, второе на $-\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}$, а третье на $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$.

Складывая, мы получаем:

$$x \left\{ a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \right\} + y \left\{ b \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \right\} + z \left\{ c \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \right\} = A \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}.$$

Это уравнение, согласно нашим результатам относительно разложения определителя по элементам какого-нибудь столбца, можно написать в виде:

$$x \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ h & h & k \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ k & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & k \end{vmatrix}.$$

Согласно 4, коэффициенты при y и z равны нулю; поэтому

$$x \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & k \end{vmatrix}.$$

Соответственным образом мы получаем уравнения:

$$y \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & k \end{vmatrix},$$

$$z \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{vmatrix}.$$

Из последних трех уравнений мы получаем значения неизвестных посредством деления на определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

Если этот определитель отличен от нуля, то наши уравнения однозначно разрешимы относительно x , y , z . Если же определитель равен нулю, то из наших формул следует, что и правые части вышестоящих уравнений равны нулю, так что заданные уравнения имеют решение только в том случае, если правые части этих уравнений A , B , C удовлетворяют особым условиям, заключающимся в обращении в нуль стоящих справа определителей.

Если в частности наша система уравнений однородна и ее определитель отличен от нуля, то мы опять получаем, что $x = y = z = 0$.

§ 4. Аффинные преобразования и теорема умножения определителей.

Последним вопросом, которого мы коснемся в этих предварительных замечаниях, будет исследование простейших свойств так называемых аффинных преобразований, которое нас попутно приведет к важной теореме об определителях.

§ 1. Аффинное преобразование плоскости и пространства. Под преобразованием или отображением некоторой части пространства или плоскости мы понимаем закон, по которому каждой точке приводится в соответствие другая точка пространства или плоскости в качестве „изображения“ первоначальной точки; первоначальную точку мы называем оригиналом. Наглядным истолкованием и связью с практическими применениями служит для понятия преобразования представление, что рассматриваемая часть пространства или плоскости заполнена каким-нибудь деформируемым веществом, и что процесс преобразования равносителен деформации, при которой каждая точка этого вещества переходит из своего начального положения в некоторое другое конечное положение.

Пользуясь прямоугольной системой координат, обозначим через x , y , z координаты первоначальной точки, а через x' , y' , z' координаты соответствующего ей изображения.

Простейшими и легче всего исследуемыми преобразованиями, лежащими в основе общей теории преобразований, являются так называемые аффинные преобразования. Аффинное преобразование определяется тем, что координаты изображения x' , y' , z' (или x' , y' на плоскости) выражаются через координаты оригинала x , y , z линейно.

Аффинное преобразование задается тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + cz + m, \\y' &= dx + ey + fz + n, \\z' &= gx + hy + kz + p,\end{aligned}$$

и соответственно

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + m, \\y' &= cx + dy + n,\end{aligned}$$

с постоянными коэффициентами a , b , ... Всякой точке пространства или плоскости приводится этим путем в соответствие другая точка — изображение первоначальной точки. Прежде всего возникает вопрос, может ли это соответствие между изображением и его оригиналом быть обращено,

т. е. соответствует ли обратно каждой точке пространства или плоскости определенная точка в качестве ее оригинала. Для этого понятно, необходимо и достаточно, чтобы уравнения:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= x' - m, \\ dx + ey + fz &= y' - n, \\ gx + hy + kz &= z' - p, \end{aligned}$$

и соответственно

$$\begin{aligned} ax + by &= x' - m, \\ cx + dy &= y' - n \end{aligned}$$

были при любых значениях правых частей разрешимы относительно x, y, z или x, y . Поэтому, согласно § 3, аффинное преобразование обратимо и притом однозначно обратимо, если его определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \text{ или соответственно } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Мы рассматриваем только такие преобразования и оставим в стороне вопрос, что происходит, когда $\Delta = 0$.

Общее аффинное преобразование мы можем путем введения промежуточной точки x'', y'', z'' разложить на преобразования

$$\begin{aligned} x'' &= ax + by + cz, \\ y'' &= dx + ey + fz, \\ z'' &= gx + hy + kz, \end{aligned}$$

или соответственно

$$\begin{aligned} x'' &= ax + by, \\ y'' &= cx + dy \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= x'' + m, \\ y' &= y'' + n, \\ z' &= z'' + p \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= x'' + m, \\ y' &= y'' + n. \end{aligned}$$

Точка (x, y, z) сначала отображается на (x'', y'', z'') , а затем — на (x', y', z') . Так как второе преобразование является не чем иным, как параллельным перемещением пространства или плоскости, то достаточно исследовать первое преобразование. Мы ограничиваемся поэтому преобразованиями вида:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz & x' &= ax + by \\ y' &= dx + ey + fz & y' &= cx + dy \\ z' &= gx + hy + kz \end{aligned}$$

с отличным от нуля определителем.

Результаты § 3 относительно линейных уравнений позволяют нам выразить обратное преобразование с помощью формул:

$$\begin{aligned} x &= a'x' + b'y' + c'z' & x &= a'x' + b'y' \\ y &= d'x' + e'y' + f'z' & y &= c'x' + d'y', \\ z &= g'x' + h'y' + k'z' \end{aligned}$$

в которых a', b', \dots представляют собою некоторые выражения, составленные из величин a, b, \dots . В силу однозначной разрешимости этих уравнений из них обратно вытекают первоначальные. В частности из $x=y=z=0$, следует $x'=y'=z'=0$ и обратно.

Геометрические свойства аффинного преобразования характеризуются следующими теоремами:

1. Изображением плоскости (или соответственно прямой в плоскости) является плоскость или прямая.

Ибо мы можем написать уравнение плоскости или прямой в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и соответственно

$$Ax + By + D = 0,$$

причем A, B, C или A, B не обращаются одновременно все в нуль. Координаты изображения какой-нибудь точки этой плоскости или прямой удовлетворяют уравнению:

$$A(a'x' + b'y' + c'z') + B(d'x' + e'y' + f'z') + C(g'x' + h'y' + k'z') + D = 0.$$

или

$$A(a'x' + b'y') + B(c'x' + d'y') + D = 0.$$

Эти точки, на которые отображаются точки данной плоскости или прямой, сами заполняют плоскость или прямую, так как коэффициенты при координатах x', y', z' или x', y'

$$A' = a'A + d'B + g'C,$$

$$B' = b'A + e'B + h'C,$$

$$C' = c'A + f'B + k'C,$$

или

$$A' = a'A + c'B,$$

$$B' = b'A + d'B$$

не обращаются все одновременно в нуль, ибо в противном случае из уравнений

$$a'A + d'B + g'C = 0,$$

$$b'A + e'B + h'C = 0,$$

$$c'A + f'B + k'C = 0,$$

или

$$a'A + c'B = 0,$$

$$b'A + d'B = 0,$$

рассматриваемых как уравнения с неизвестными A, B, C или A, B , следовало бы что $A=B=C=0$ или $A=B=0$.

2. Изображением прямой в пространстве является прямая. Это следует непосредственно из того, что прямую можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей; поэтому, согласно 1, изображение прямой также является линией пересечения двух плоскостей и представляет собою поэтому прямую линию.

3. Две параллельные плоскости в пространстве и соответственно две параллельные прямые на плоскости отображаются при аффинном преобразовании на параллельные же плоскости или прямые.

Ибо если бы изображения заданных параллельных плоскостей или прямых имели точку пересечения, то и оригиналы этих изображений пересекались бы в точке, служащей оригиналом точки пересечения изображений.

4. Две параллельные прямые в пространстве отображаются на параллельные же прямые.

В самом деле, если данные две прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются, то согласно 1 и 2, то же имеет место и для их изображений; поэтому эти последние также параллельны.

Изображением вектора v служит естественно вектор v' , ведущий от изображения начальной точки вектора v к изображению конечной точки этого вектора. Так как компоненты вектора равны разностям соответственных координат начальной и конечной точки, то они преобразовываются при самом общем аффинном преобразовании согласно схеме:

$$\begin{aligned}v'_1 &= av_1 + bv_2 + cv_3, \\v'_2 &= dv_1 + ev_2 + fv_3, \\v'_3 &= gv_1 + hv_2 + kv_3.\end{aligned}$$

2. Умножение аффинных преобразований и приведение общего аффинного преобразования к простейшему виду. Если мы отобразим изображение x', y', z' точки x, y, z при преобразовании

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + cz, \\y' &= dx + ey + fz, \\z' &= gx + hy + kz,\end{aligned}$$

путем второго преобразования

$$\begin{aligned}x'' &= a_1x' + b_1y' + c_1z', \\y'' &= d_1x' + e_1y' + f_1z', \\z'' &= g_1x' + h_1y' + k_1z'\end{aligned}$$

на точку x'', y'', z'' , то мы получим, как это непосредственно видно, снова аффинное преобразование, а именно:

$$\begin{aligned}x'' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\y'' &= d_2x + e_2y + f_2z, \\z'' &= g_2x + h_2y + k_2z\end{aligned}$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 a + b_1 d + c_1 g, & b_2 &= a_1 b + b_1 e + c_1 h, & c_2 &= a_1 c + b_1 f + c_1 k, \\ d_2 &= d_1 a + e_1 d + f_1 g, & e_2 &= d_1 b + e_1 e + f_1 h, & f_2 &= d_1 c + e_1 f + f_1 k, \\ g_2 &= g_1 a + h_1 d + k_1 g, & h_2 &= g_1 b + h_1 e + k_1 h, & k_2 &= g_1 c + h_1 f + k_1 k. \end{aligned}$$

Мы называем это третье аффинное преобразование произведением первых двух преобразований. Если определители первых двух преобразований отличны от нуля, то эти преобразования обратимы; поэтому и произведение этих преобразований также обратимо. Коэффициенты произведения данных двух преобразований получаются из коэффициентов последних следующим образом: элементы какого-нибудь столбца первого преобразования умножаются на соответственные элементы какой-нибудь строки второго преобразования, и сумма этих трех произведений равняется коэффициенту третьего преобразования, стоящему в столбце того же номера, что и взятый столбец первого преобразования, и строке того же номера, что и взятая строка второго преобразования. Совершенно аналогично получается произведение преобразований

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 x' + b_1 y', \\ y'' &= c_1 x' + d_1 y', \end{aligned}$$

а именно:

$$\begin{aligned} x'' &= (a_1 a + b_1 c) x + (a_1 b + b_1 d) y, \\ y'' &= (c_1 a + d_1 c) x + (c_1 b + d_1 d) y. \end{aligned}$$

Примитивным преобразованием мы называем такое, при котором из трех или двух координат изображения одна или две координаты совпадают с соответственными координатами оригинала. Наглядно мы можем себе представить примитивное преобразование как такое преобразование, при котором плоскость или пространство подвергаются растяжению только вдоль одного направления (величина которого впрочем меняется от точки к точке), так что все точки перемещаются при этом по параллельным между собою прямым. Примитивное аффинное преобразование, при котором перемещение производится параллельно оси x , выражается аналитически формулами вида:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Общее аффинное преобразование на плоскости

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

с отличным от нуля определителем может быть представлено в виде произведения примитивных преобразований.

Мы можем предположить, что $a \neq 0$ ¹⁾. Введем промежуточную точку ξ, η с помощью примитивного преобразования

$$\xi = ax + by, \quad \eta = y,$$

определитель которого a отличен от нуля. Из ξ, η мы получаем x', y' с помощью второго примитивного преобразования

$$x' = \xi, \quad y' = \frac{c}{a} \xi + \frac{ad - bc}{a} \eta$$

с определителем

$$\frac{ad - bc}{a} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

и искомое разложение данного преобразования в произведение примитивных преобразований достигнуто.

Совершенно аналогичным образом можно разложить на примитивные преобразования общее аффинное преобразование в пространстве

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= dx + ey + fz, \\ z' &= gx + hy + kz \end{aligned}$$

с отличным от нуля определителем.

В самом деле, из трех определителей

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

один по крайней мере отличен от нуля, ибо, в противном случае, разлагая по элементам последней строки, мы получили бы, что

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0.$$

Совершенно так же, как раньше, мы можем допустить, не ограничивая общности, что $a \neq 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$.

Мы вводим первую промежуточную точку (ξ, η, ζ) с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by + cz \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \end{aligned}$$

¹⁾ Если $a = 0$, то $b \neq 0$ и, переставляя между собою x и y , мы получим снова случай $a \neq 0$. Такая перестановка перемещений, выражающаяся преобразованием $X = y, Y = x$, в свою очередь равняется произведению последовательных примитивных преобразований.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x - y \\ \eta_1 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 \\ \eta_2 &= \xi_1 + \eta_1 = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= -\xi_2 + \eta_2 = y, \\ Y &= \eta_2 = x. \end{aligned}$$

Определитель этого примитивного преобразования $a \neq 0$.

При втором отображении на точку ξ', η', ζ' мы положим $\xi' = \xi$, $\zeta' = \zeta$, а η' выберем так, чтобы $\eta' = y'$. Тогда нам остается произвести еще одно примитивное преобразование.

Вводя в $\eta' = y' = dx + ey + fz$ вместо x, y, z величины ξ, η, ζ , мы получим второе примитивное преобразование в форме:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \\ \eta' &= \frac{d}{a} \xi + \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \eta + \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \zeta, \\ \zeta' &= \zeta\end{aligned}$$

Определитель этого преобразования

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

Третье преобразование получается тогда само собой, и его не стоит выписывать здесь в явном виде.

3. Геометрическое значение определителя преобразования и теорема умножения определителей. Рассуждения предыдущего номера приводят к выяснению геометрического значения определителя аффинного преобразования и дают вместе с тем алгебраическую теорему об умножении определителей.

Рассмотрим на плоскости треугольник с вершинами $(0, 0)$, (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) , площадь которого дается, согласно § 2, формулой:

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Исследуем, чему равняется отношение площади F' треугольника, в который переходит данный треугольник при примитивном аффинном преобразовании

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\ y' &= y\end{aligned}$$

к площади F . Вершины изображения данного треугольника имеют координаты:

$$0, 0; ax_1 + by_1, y_1; ax_2 + by_2, y_2,$$

а потому

$$F' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель может быть преобразован, согласно теореме § 3, следующим образом:

$$F' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1 & ax_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{a}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

откуда

$$F' = a \cdot F.$$

Если бы мы взяли примитивное преобразование

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= cx + dy,\end{aligned}$$

то мы получили бы таким же образом

$$F' = d \cdot F.$$

Таким образом оказывается, что при примитивном аффинном преобразовании площадь треугольника умножается на постоянный множитель, не зависящий от выбора треугольника ¹⁾).

Так как общее аффинное преобразование может быть разложено в произведение примитивных преобразований, то это остается верным для всякого аффинного преобразования. При всяком аффинном преобразовании отношение площади преобразованного треугольника к площади его оригинала равняется постоянному числу, не зависящему от выбора треугольника и определяемому исключительно коэффициентами преобразования. Чтобы найти значение этого постоянного отношения, мы рассмотрим в частности треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и имеющий площадь $F = \frac{1}{2}$. Так как изображение этого треугольника, получающееся при аффинном преобразовании

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy,\end{aligned}$$

имеет вершины $(0, 0)$; (a, c) ; (b, d) , то его площадь равна:

$$F' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = F \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Итак постоянное отношение площадей $F':F$ при некотором аффинном преобразовании равняется определителю этого преобразования.

Совершенно таким же образом мы можем поступить и в случае пространственного преобразования.

Рассмотрим в пространстве тетраэдр с вершинами $(0, 0, 0)$; (x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_3, y_3, z_3) и преобразуем его с помощью примитивного преобразования

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + cz \\ y' &= \quad \quad y \\ z' &= \quad \quad \quad z.\end{aligned}$$

¹⁾ Для треугольников, ни одна из вершин которых не совпадает с началом координат, это свойство получается точно таким же образом из приведенной на стр. 19 общей формулы площади треугольника.

Тогда мы получим для объема V' преобразованного тетраэдра с вершинами $(0, 0, 0)$; $(ax_1 + by_1 + cz_1, y_1, z_1)$; $(ax_2 + by_2 + cz_2, y_2, z_2)$; $(ax_3 + by_3 + cz_3, y_3, z_3)$ формулу:

$$V' = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 & ax_2 + by_2 + cz_2 & ax_3 + by_3 + cz_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \\ = \frac{a}{6} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

так что

$$V' = aV,$$

где V означает объем первоначального тетраэдра.

Точно так же мы получаем для объема V' при примитивном преобразовании

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= dx + ey + fz \\ z' &= z \end{aligned}$$

формулу:

$$V' = eV,$$

а при примитивном преобразовании

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= gx + hy + kz \end{aligned}$$

имеем:

$$V' = kV.$$

Отсюда следует, что и при всяком аффинном преобразовании объем тетраэдра умножается на постоянный множитель ¹⁾. Чтобы вычислить этот постоянный множитель для преобразования

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= dx + ey + fz, \\ z' &= gx + hy + kz \end{aligned}$$

мы рассматриваем тетраэдр с вершинами $(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$, изображение которого имеет вершины $(0, 0, 0)$; (a, d, g) ; (b, e, h) ; (c, f, k) . Поэтому мы имеем для объемов V' и V изображения и оригинала значения:

$$V' = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \quad V = \frac{1}{6},$$

следовательно искомый постоянный множитель равен определителю

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Если ни одна из вершин тетраэдра не совпадает с началом координат, то эта теорема следует из приведенной на стр. 20 общей формулы объема.

Знак определителя также имеет геометрическое значение. Ибо из установленной в § 2 зависимости между направлением обхода или винтового вращения и знаком площади треугольника или объема тетраэдра, непосредственно следует, что при преобразовании с положительным определителем направление обхода или винтового вращения сохраняется, а при преобразовании с отрицательным определителем это направление меняется на обратное.

Рассмотрим теперь умножение двух преобразований

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + cz, \\y' &= dx + ey + fz, \\z' &= gx + hy + kz, \\x'' &= a_1x' + b_1y' + c_1z', \\y'' &= d_1x' + e_1y' + f_1z', \\z'' &= g_1x' + h_1y' + k_1z',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x'' &= (a_1a + b_1d + c_1g)x + (a_1b + b_1e + c_1h)y + (a_1c + b_1f + c_1k)z, \\y'' &= (d_1a + e_1d + f_1g)x + (d_1b + e_1e + f_1h)y + (d_1c + e_1f + f_1k)z, \\z'' &= (g_1a + h_1d + k_1g)x + (g_1b + h_1e + k_1h)y + (g_1c + h_1f + k_1k)z.\end{aligned}$$

При переходе от x, y, z к x', y', z' объем тетраэдра умножается на

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix},$$

при переходе от x', y', z' к x'', y'', z'' объем тетраэдра умножается на

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix},$$

при непосредственном же переходе от x, y, z к x'', y'', z'' объем тетраэдра умножается на

$$\begin{vmatrix} a_1a + b_1d + c_1g & a_1b + b_1e + c_1h & a_1c + b_1f + c_1k \\ d_1a + e_1d + f_1g & d_1b + e_1e + f_1h & d_1c + e_1f + f_1k \\ g_1a + h_1d + k_1g & g_1b + h_1e + k_1h & g_1c + h_1f + k_1k \end{vmatrix}.$$

Поэтому мы получаем следующее равенство, которое называется теоремой умножения определителей:

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & k_2 \end{vmatrix} = \\&= \begin{vmatrix} a_1a_2 + b_1d_2 + c_1g_2 & a_1b_2 + b_1e_2 + c_1h_2 & a_1c_2 + b_1f_2 + c_1k_2 \\ d_1a_2 + e_1d_2 + f_1g_2 & d_1b_2 + e_1e_2 + f_1h_2 & d_1c_2 + e_1f_2 + f_1k_2 \\ g_1a_2 + h_1d_2 + k_1g_2 & g_1b_2 + h_1e_2 + k_1h_2 & g_1c_2 + h_1f_2 + k_1k_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Элементы определителя справа мы называем элементами, получающимися путем композиции строк определителя

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix}$$

со столбцами определителя

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & k_2 \end{vmatrix}.$$

В точке пересечения i -й строки и k -го столбца произведения этих определителей стоит выражение, получающееся путем композиции i -й строки определителя

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix}$$

с k -м столбцом определителя

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & k_2 \end{vmatrix}.$$

Так как во всяком определителе можно заменить строки столбцами и столбцы строками, то произведение двух определителей можно также получить путем композиции столбцов со строками, столбцов со столбцами и строк со строками. Разумеется, для определителей второго порядка также имеют место соответственные теоремы; именно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 c_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 b_2 & c_1 c_2 + d_1 d_2 \end{vmatrix}$$

(композиция строк со строками) и т. д.

Глава II.

ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ.

После того, как в первой части нашего курса мы имели дело исключительно с функциями от одной переменной, мы должны теперь перейти к рассмотрению многих независимых переменных. Уже практические применения анализа побуждают нас заняться этим, ибо почти во всех зависимостях, имеющих место в явлениях природы, зависимые величины являются не функциями от одной единственной независимой переменной, но большей частью определяются двумя, тремя или большим числом независимых переменных. Так например объем идеального газа только тогда является функцией одного только давления, если мы оставляем неизменной температуру; вообще же эта последняя также изменяется, и мы должны объем поставить в зависимость не от одной, а от двух величин, а именно от величины давления и величины температуры, так что объем оказывается функцией от двух переменных.

Но и с чисто математической точки зрения является безусловно необходимым заняться подробным исследованием функций от многих переменных. При этом мы сможем воспользоваться достигнутыми нами до сих пор результатами, и во многих случаях нам достаточно будет ограничиться лишь некоторыми простыми дополнениями.

Большой частью является вполне достаточным ограничиться случаем двух независимых переменных x и y , поскольку для функций от трех и большего числа переменных не приходится проводить никаких существенно новых рассуждений. Поэтому в целях упрощения выражений и записи я ограничусь случаем двух переменных всюду, где существо вопроса не потребует особых рассматриваний для многих независимых переменных.

§ 1. Понятие функции от многих переменных.

1. Функции и области, в которых они заданы. Уравнения вида:

$$u = x^2 + y^2, \quad u = x - y, \quad u = xy \quad \text{или} \quad u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

приводят в соответствие паре значений (x, y) значение функции u . Для первых трех наших выражений это соответствие имеет место для любой системы значений (x, y) , для последней же функции, функция имеет смысл только для таких пар значений (x, y) , для которых $x^2 + y^2 \leq 1$.

Мы называем u функцией от независимых переменных x и y . Этот способ выражения мы употребляем вообще всякий раз, когда каждой рассматриваемой паре значений (x, y) приводится в соответствие с помощью какого-нибудь правила значение u в качестве зависимой переменной, и мы

пишем $u = f(x, y)$. Это правило может задаваться либо в виде формулы, определяющей функцию, как в вышеприведенных примерах, либо в словесной описательной форме, как например „ u есть площадь прямоугольника со сторонами x и y “; определение функции может также опираться на эмпирическое наблюдение какого-нибудь явления природы, как например при измерении какой-нибудь величины u из области метеорологии или земного магнетизма для различных географических долгот x и широт y и т. д. Очевидно, что для функции $u = f(x, y, z)$ от трех независимых переменных x, y, z отличие заключается только в том, что значение функции u приводится в соответствие тройке значений (x, y, z) , а для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n значение функции u зависит от системы значений (x_1, x_2, \dots, x_n) . Так например объем прямоугольного параллелепипеда $u = xyz$ зависит от его ребер x, y и z ; мощность переменного тока $L = \frac{1}{2} EJ \cos \varphi$ зависит от

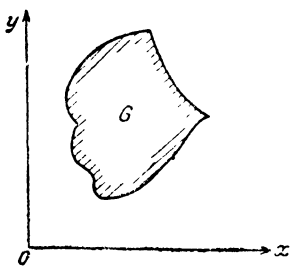
амплитуды напряжения E , амплитуды силы тока J и „сдвига фаз“ φ напряжения E относительно J ; магнитное склонение зависит от географической долготы, широты и времени, тогда как сумма $u' = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ зависит от n слагаемых.

Для двух независимых переменных x и y мы наглядно изображаем пару значений (x, y) посредством точки, имеющей в некоторой плоской прямоугольной системе координат координаты x, y , и мы будем иногда называть эту точку аргументом функции. Точка (x, y) для функций $u = x^2 + y^2$, $u = x - y$ и $u = xy$ может занимать любое положение в плоскости xOy ; мы говорим, что эти функции определены во всей плоскости x, y .

Для последней из рассмотренных функций $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область изменения x, y должна быть, напротив, ограничена внутренностью и границей круга $x^2 + y^2 \leq 1$; функция определена только внутри и на границе этого круга.

Подобно тому, как для функции от одной переменной аргумент может изменяться либо прерывно, либо непрерывно, так и для пары аргументов функции от двух переменных могут иметь место оба эти случая. Так например в биологии встречаются в качестве прерывно изменяющихся аргументов числа органов растений и животных, которые, разумеется, могут принимать только целые значения; напротив того, длины, веса и т. д. дают непрерывно изменяющиеся аргументы. В дальнейшем мы будем иметь дело большей частью с непрерывно изменяющейся парой аргументов, т. е. точка (x, y) может быть выбрана где угодно внутри определенной области G плоскости Oxy (соответственно прежнему „интервалу“ для одной единственной независимой переменной).

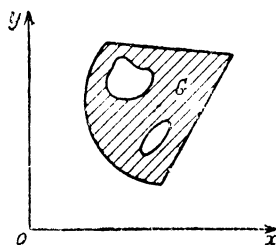
Подобной областью G либо может быть вся плоскость, либо область G может состоять из одного куска плоскости, ограниченного одной единственной замкнутой кривой C , не пересекающейся сама с собой (односвязная область, черт. 10); или же область G может быть ограниченной



Черт. 10. Односвязная область.

несколькими замкнутыми кривыми (многосвязная область); число ограничивающих кривых определяет „число связности“; так например черт. 11 показывает трехсвязную область.

Мы будем предполагать, что граничные кривые, как и принципиально вообще все кривые, которые мы рассматриваем в этом курсе, являются кусочно гладкими кривыми; т. е. мы предполагаем раз навсегда, что всякая такая кривая состоит из конечного числа дуг, каждая из которых имеет всюду касательную, непрерывно изменяющуюся от одной конечной точки до другой; такие граничные кривые могут поэтому иметь только конечное число угловых точек и точек заострения.



Черт. 11. Трехсвязная область.

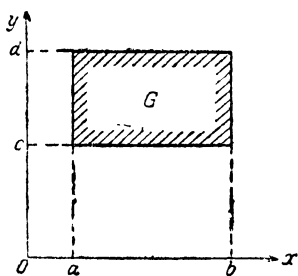
Наиболее важными областями, постоянно встречающимися при изучении функций, являются, во-первых, так называемые прямоугольные области (черт. 12), определяемые неравенствами вида:

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ c &\leq y \leq d \end{aligned}$$

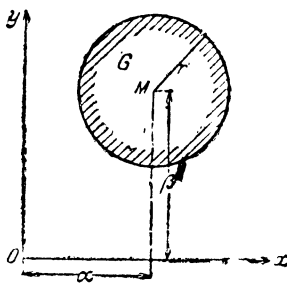
(здесь изменение каждого из независимых переменных просто ограничено некоторым интервалом, а точка (x, y) пробегает прямоугольник), и, во-вторых, круговые области (черт. 13), определяемые неравенством вида:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq r^2;$$

точка (x, y) пробегает здесь круг с координатами центра α, β и радиусом r .



Черт. 12. Прямоугольная область.



Черт. 13. Круговая область.

Если точка P лежит внутри области G , например является центром круга, то мы называем G также окрестностью точки P . Всякая окрестность точки P всегда содержит некоторый достаточно малый круг с центром P .

Укажу кратко, что в случае большего числа независимых переменных, например для трех переменных x, y и z , все происходит точно таким же образом, только здесь точка с координатами x, y, z непрерывно изменяется уже не в некоторой области на плоскости, а в области, лежащей в пространстве трех измерений.

В частности эта область может быть прямоугольной областью, характеризуемой тремя неравенствами вида:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad e \leq z \leq f,$$

или шаровой областью, определяемой неравенством вида:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 \leq r^2.$$

Отмечу наконец еще одно более тонкое различие, которое впрочем мало существенно для целей нашего курса, но которое необходимо принимать во внимание при более глубоких исследованиях.

Во многих случаях „граничные точки“ или „граница“, т. е. точки ограничивающих кривых, не причисляются к области. Мы называем такую область открытой областью (см. дополнения § 1, 2). Если же мы причисляем граничные точки к области, как мы это будем большей частью делать, то такую область называют, если это требуется специально подчеркнуть, замкнутой областью.

Когда число независимых переменных больше трех и когда геометрическая интуиция уже не дает средств для интерпретации системы независимых переменных x, y, z, \dots , все-таки иногда употребляют геометрический способ выражения и например называют систему n чисел точкой n -мерного пространства. Само собой понятно, что следует понимать под прямоугольной или круговой областью в таком пространстве; это — множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad c_1 \leq z \leq c_2, \dots,$$

или соответственно

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 + \dots \leq r^2.$$

Наконец дадим точное определение общего понятия функции: если G есть некоторая область, внутри которой переменные x, y, \dots могут как угодно изменяться, и если каждой точке (x, y, \dots) этой области с помощью какого-нибудь закона приводится в соответствие определенное значение u , то в этой области $u = f(x, y, \dots)$ называется функцией непрерывных независимых переменных x, y, \dots .

Как и для случая одной независимой переменной мы должны помнить, что функция приводит в соответствие системе независимых переменных x, y, \dots значение зависимой переменной u однозначным образом. Если поэтому такая функция определена с помощью многозначного аналитического выражения, например выражения, содержащего квадратный корень $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, то функция одним таким выражением еще не вполне определена, но должно быть еще дополнительно указано, какое из различных возможных значений данного выражения мы должны взять для определения нашей функции, например в нашем случае, нужно ли брать положительное или отрицательное значение квадратного корня. Тогда говорят, что заданное выражение определяет несколько различных однозначных ветвей функции (т. I, стр. 10).

Если хотят одновременно рассматривать все ветви функции, не отдавая предпочтения ни одной из них, то их обычно соединяют в одну многозначную функцию. Мы однако принципиально ограничимся во всех наших рассмотрениях однозначными ветвями функции.

2. Простейшие типы функций. Как и для одной переменной, так и здесь простейшими функциями являются целые рациональные функции или многочлены. Самая общая целая рациональная функция первой степени или целая линейная функция имеет вид:

$$u = ax + by + c,$$

где a , b и c — постоянные. Самый общий многочлен второй степени имеет соответственным образом вид:

$$u = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

вообще всякий многочлен любой степени является суммой членов вида $a_{mn}x^m y^n$, где постоянные a_{mn} имеют различные значения для различных пар индексов (m, n) .

Дробные рациональные функции являются частными двух многочленов; к ним например принадлежит дробно линейная функция

$$u = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}.$$

Действие извлечения корня приводит от рациональных функций к известным алгебраическим функциям ¹⁾, например:

$$u = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{x^3+xy}}.$$

При построении сложных функций от многих переменных мы почти всегда будем пользоваться хорошо нам известными функциями от одной переменной ²⁾; например:

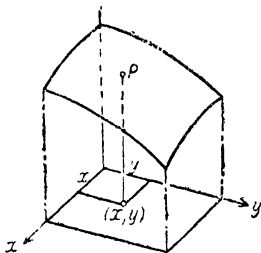
$$u = \sin(xy) \quad \text{или} \quad u = \log\left(y^2 + \cos \frac{x}{2}\right).$$

3. Геометрическая интерпретация функций. Здесь так же как и для функций от одной переменной мы должны при всех применениях наложить на общее понятие функции вследствие его слишком большой широты значительные ограничения. К таким ограничениям нас опять непосредственно приводит геометрическая интерпретация. Подобно тому, как мы наглядно изображаем функции от одной переменной с помощью кривых, мы пытаемся представить геометрически функции от двух переменных с помощью поверхностей и налагаем на понятие функции такие ограничения, чтобы подобная геометрическая интерпретация действительно была возможной. Мы проще всего придем к такой геометрической интерпретации, рассматривая пространственную систему прямоугольных координат x , y и u и приводя в соответствие каждой точке (x, y) области G лежащую

¹⁾ Относительно строгого определения понятий: „алгебраическая“ и „трансцендентная“ функция, см. стр. 105.

²⁾ См. также параграф о сложных функциях стр. 69 и след.

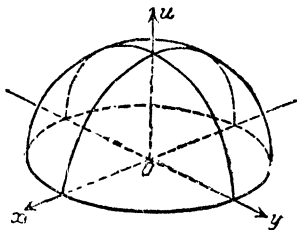
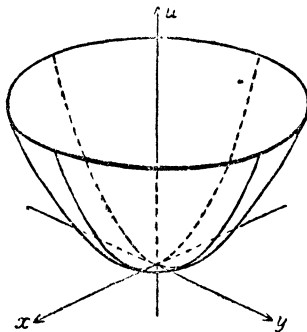
над ней точку пространства с третьей координатой $u = f(x, y)$. Когда точка (x, y) пробегает область G , то рассматриваемая точка пространства P описывает некоторую поверхность в пространстве. Мы берем эту поверхность в качестве геометрической интерпретации функции (черт. 14).

Черт. 14. $u = f(x, y)$

Обратно, в аналитической геометрии изображают, как известно, соответственным образом всякую поверхность в пространстве с помощью функции от двух переменных, так что между такими поверхностями, с одной стороны, и функциями от двух переменных, с другой, устанавливается этим путем взаимное соответствие. Так например функции

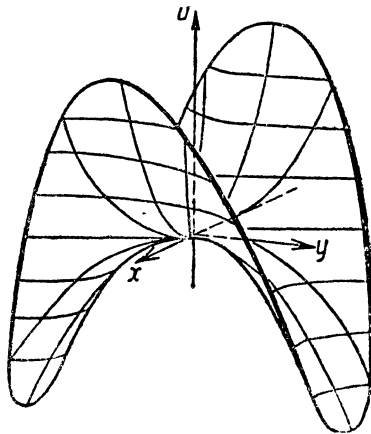
$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

с положительным знаком квадратного корня соответствует лежащая над плоскостью x, y верхняя половина шаровой поверхности радиуса равного единице с центром в начале координат (черт. 15); функции $u = x^2 + y^2$ соответствует так называемый пара-

Черт. 15. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ Черт. 16. $u = x^2 + y^2$

болоид вращения (черт. 16) (он получается вращением параболы $u = x^2$ вокруг оси u); функциям $u = x^2 - y^2$ и $u = xy$ соответствует гиперболический параболоид (черт. 17). Линейная функция $u = ax + by + c$ изображается лежащей в трехмерном пространстве плоскостью¹⁾.

Это изображение с помощью прямоугольных координат обладает однако сле-

Черт. 17. $u = x^2 - y^2$

¹⁾ Если функция $u = f(x, y)$ не содержит в себе вовсе одной из независимых переменных, например y , так что u зависит только от x , например $u = g(x)$, то эта функция изображается в пространстве u, x, y цилиндром, получающимся, если мы во всех точках кривой $u = g(x)$, лежащей на плоскости u, x , проведем прямые, перпендикулярные к этой плоскости.

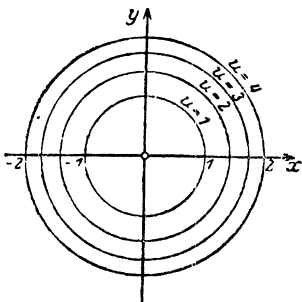
дующими двумя недостатками. Во-первых, наше пространственное представление перестает нам служить, как только мы имеем не две, а три или больше независимых переменных. Во-вторых, уже и для случая двух независимых переменных нам часто бывает приятнее не выходить за пределы плоскости x, y так как на плоскости мы можем беспрепятственно строить и чертить. Эта точка зрения находит осуществление при втором геометрическом изображении хода функции, а именно при графическом представлении функции с помощью линий уровня (линий равных высот, или линий равных глубин и т. д.).

Мы находим на плоскости xOy те точки, в которых $u=f(x, y)$ имеет постоянное значение, например $u=k$. Эти точки образуют, вообще говоря, одну или несколько связанных кривых, так называемую линию уровня для соответствующего постоянного значения функции. Эту линию можно также получить, пересекая поверхность $u=f(x, y)$ плоскостью $z=k$, параллельной плоскости xOy , и ортогонально проектируя линию пересечения на плоскость xOy .

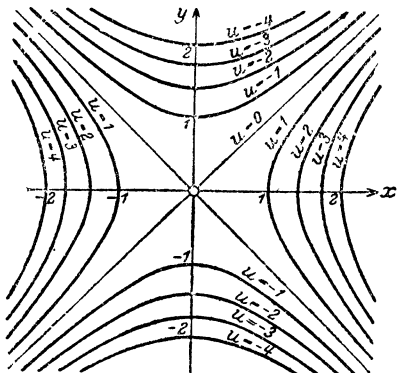
Система этих линий уровня с написанными на них значениями k_1, k_2, \dots уровня $u=k$ также наглядно изображает ход функции. Эту систему линий называют сетью или таблицей кривых функции $u=f(x, y)$. Обыкновенно придают постоянному k значения, образующие арифметическую прогрессию, например $k=\nu h$, где $\nu=0, 1, 2, \dots$

Тогда густота линий уровня служит мерой подъема поверхности $u=f(x, y)$, ибо между двумя соседними линиями уровня значение функции изменяется на одну и ту же величину; поэтому там, где линии уровня сгущаются и тесно сходятся между собою, поверхность либо круто подымается вверх, либо отвесно спускается вниз; там же, где линии уровня разрежаются и отдаляются друг от друга, мы имеем на поверхности отлогий участок.

Линейной функции $u=ax+by+c$ соответствует при изображении с помощью линий уровня система параллельных прямых $ax+by+c=k$. Функция $u=x^2+y^2$ изображается системой концентрических кругов (черт. 18); функция $u=x^2-y^2$, для



Черт. 18. Линии уровня функции $u=x^2+y^2$.



Черт. 19. Линии уровня функции $u=x^2-y^2$.

которой соответствующая ей в пространстве x, y, u поверхность имеет в начале координат так называемую гиперболическую точку (черт. 17), изображается системой гипербол, показанных на черт. 19.

Изображение функции $u=f(x, y)$ с помощью линий уровня обладает тем преимуществом, что его можно в наглядной форме перенести также и на функции $u=f(x, y, z)$ от трех переменных x, y и z . Вместо линий уровня мы здесь имеем так называемые поверхности уровня $f(x, y, z)=k$, где k означает постоянную, которой мы придаем соответствующую последовательность значений. Так например для функции $u=x^2+y^2+z^2$ поверхности уровня представляют собою концентрические шары с центром в начале координат.

§ 2. Непрерывность.

1. Определение. Наше требование, чтобы было возможно указанным выше образом наглядно изобразить функцию, аналитически выражается как и в случае функций от одной переменной условием непрерывности. Совершенно аналогично прежнему мы вводим понятие непрерывности с помощью следующего определения:

Определенная в области G функция $u=f(x, y)$ называется непрерывной в точке (ξ, η) , лежащей внутри этой области, если для всех точек (x, y) области G , близких к точке (ξ, η) , значение функции $f(x, y)$ мало отличается от $f(\xi, \eta)$ и притом сколь угодно мало, если только (x, y) лежит достаточно близко к (ξ, η) .

Точнее: если задано сколь угодно малое положительное число ε , то существует такое положительное расстояние $\delta=\delta(\varepsilon)$ (которое, вообще говоря, зависит от ε и стремится вместе с ε к нулю), что для всех точек (x, y) области G , расстояние которых от (ξ, η) не превосходит δ , т.е. для которых

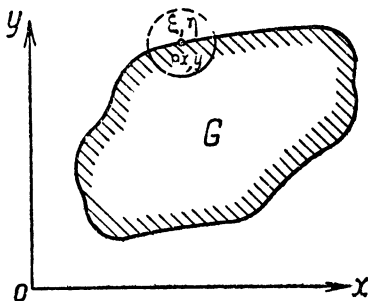
$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leq\delta^2{}^1),$$

имеет место неравенство:

$$|f(x, y)-f(\xi, \eta)|\leq\varepsilon.$$

Иными словами: для всякой пары значений (h, k) , для которой $h^2+k^2\leq\delta^2$, а точка $(\xi+h, \eta+k)$ принадлежит области G , имеет место неравенство:

$$|f(\xi+h, \eta+k)-f(\xi, \eta)|\leq\varepsilon.$$



Черт. 20.

Если функция непрерывна во всякой точке области G , то мы говорим, что функция непрерывна в области G .

Налагаемое в требовании непрерывности на расстояние δ условие: $h^2+k^2\leq\delta^2$ может быть заменено следующим

¹⁾ Для внутренней точки (ξ, η) области G точки (x, y) заполняют при достаточно малом δ весь круг $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leq\delta^2$, для граничной же точки они заполняют только ту часть этого круга, которая лежит внутри области G (черт. 20).

равносильным условием: для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ должны существовать два положительных числа δ_1 и δ_2 , таких, что

$$|f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi, \eta)| \leq \varepsilon,$$

если только

$$|h| \leq \delta_1, \quad |k| \leq \delta_2.$$

Оба условия равносильны; ибо если выполняется первое условие, то и второе выполняется при $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$; обратно, если выполняется второе условие, то выполняется также и первое, если взять δ равным наименьшему из обоих чисел δ_1 и δ_2 .

Почти очевидными являются следующие теоремы: сумма и произведение непрерывных функций также непрерывны; частное непрерывных функций непрерывно всюду, где знаменатель отличен от нуля; непрерывная функция от непрерывных функций также непрерывна (см. примечание к стр. 70). В частности целые рациональные функции всюду непрерывны, а дробные рациональные функции непрерывны всюду, где знаменатель не обращается в нуль¹⁾.

2. Понятие предела для случая нескольких непрерывных переменных. Понятие непрерывной функции получает новое освещение, если мы введем в соответствии с нашими прежними рассмотрениями для одной независимой переменной понятие предела для многих непрерывных переменных. Мы говорим, что точка (x, y) стремится или сходится к точке (ξ, η) , и записываем это символически $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, если одновременно непрерывная переменная x стремится к ξ , а непрерывная переменная y стремится к η , так что расстояние

$$|\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}|$$

между точками (x, y) и (ξ, η) , оставаясь все время отличным от нуля, неограниченно уменьшается и стремится к нулю. Точка (x, y) пробегает следовательно последовательность точек, которые неограниченно приближаются к точке (ξ, η) , никогда однако ее не достигая. Так например точка (x, y) может стремиться к точке (ξ, η) по прямой линии или по спирали, закручивающейся вокруг точки (ξ, η) или же вдоль какой-нибудь другой кривой, все более и более приближающейся к точке (ξ, η) .

¹⁾ Другим почти очевидным фактом, который все же полезно особо формулировать, является следующий: если в какой-нибудь внутренней точке P области G непрерывная в этой области функция $f(x, y)$ отлична от нуля, то можно окружить P такой всецело принадлежащей G окрестностью, например достаточно малым кругом с центром P , чтобы функция f не обращалась в нуль ни в одной точке этой окрестности. В самом деле, если в P функция равна a , то мы можем в силу непрерывности окружить P таким малым кругом, в котором значения функции отличаются от a менее чем на $\frac{a}{2}$ и следовательно отличны от нуля.

Если теперь нам дана функция $f(x, y)$ от непрерывных переменных x и y , то мы говорим, что функция $f(x, y)$ стремится или сходится при $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ к пределу g , и записываем это символически:

$$f(x, y) \rightarrow g \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (\xi, \eta),$$

или

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} f(x, y) = g,$$

если значение функции $f(x, y)$ стремится к предельному значению g , когда расстояние между (x, y) и (ξ, η) неограниченно убывает. Другими словами: как бы мало ни было заданное нам число ϵ , мы можем всегда определить соответствующее ϵ расстояние $\delta = \delta(\epsilon)$ так, чтобы $|f(x, y) - g| \leq \epsilon$ для всех точек, для которых

$$|\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}| \leq \delta.$$

Все правила действий над пределами, с которыми мы ознакомились в первом томе, переносятся, разумеется, полностью и на рассматриваемый нами случай.

Если точка (x, y) не может быть выбрана совершенно произвольно, и если ее выбор ограничен точками, принадлежащими либо определенной области G , либо кривой C , либо вообще точками какого-нибудь множества точек M , среди которых имеются точки, сколь угодно близкие к (ξ, η) , то наше определение предела сохраняет свой смысл. Мы тогда говорим, что предел g существует для области G , или кривой C , или множества точек M . Если например (ξ, η) лежит на границе области G , то в качестве точек (x, y) , стремящихся к (ξ, η) , мы рассматриваем исключительно точки области G . Мы говорим тогда о краевом значении функции $f(x, y)$.

Наше определение непрерывности включает в себе следовательно два требования: во-первых, для функции $f(x, y)$ в области G должен существовать предел g , о котором мы говорили; во-вторых, этот предел g должен совпадать со значением функции в соответствующей точке (ξ, η) .

Само собой понятно, что мы можем теперь определить непрерывность функции не только для области G , но и например вдоль кривой C точно таким же образом.

3. Примеры точек разрыва. Для функций от одной переменной мы ознакомились с различными типами разрывов непрерывности: точками бесконечности, точками разрыва первого рода и точками неопределенности. Для многих переменных такая простая классификация основных

4) Точно так же как и для одной переменной, мы можем убедиться в том, что наше определение понятия предела равносильно следующему: рассмотрим последовательности точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$, стремящихся к точке (ξ, η) (т. е. для которых расстояние $\sqrt{(x_n - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}$ стремится к нулю с возрастанием n), причем ни одна из точек последовательности не совпадает с (ξ, η) . Если тогда значение функции $f(x, y)$ для точек каждой такой последовательности стремится к некоторому пределу, то этот предел должен быть одинаков для всех последовательностей, и мы его называем пределом $f(x, y)$ при приближении к точке (ξ, η) .

типов точек разрыва уже невозможна. Положение особенно осложняется тем, что разрыв непрерывности может иметь место не только в отдельных точках, но во всех точках, принадлежащих одной или нескольким линиям.

Так например функция $u = \frac{1}{x-y}$ имеет всю прямую $x=y$ линией бесконечности. В зависимости от того, приближаемся ли мы к этой прямой с одной или с другой стороны, функция неограниченно растет в положительном или отрицательном направлении. Функция $u = \frac{1}{(x-y)^2}$ имеет эту же

прямую линией бесконечности, но с тем отличием, что с обеих сторон этой прямой значения функции неограниченно растут в положительном направлении. Функция $u = \frac{1}{x^2+y^2}$ не имеет линий бесконечности, но только

одну точку бесконечности $x=0, y=0$. Функция $u = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ имеет в точке $x=0, y=0$ точку неопределенности; изображение этой функции получается из изображения уже рассмотренной в т. I, стр. 44 функции $u = \sin \frac{1}{x}$ просто путем вращения этой кривой вокруг оси u .

Менее простым является изображение функции $u = \sin \frac{1}{xy}$, для которой как ось x , так и ось y являются линиями неопределенности, а поведение функции в самом начале координат не поддается вовсе наглядному рассмотрению.

Другой поучительный пример точки разрыва дает рациональная функция $u = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. В точке $x=0, y=0$ эта функция первоначально не определена; мы дополняем определение функции, полагая $u(0, 0) = 0$.

Наша функция имеет тогда в начале координат своеобразный разрыв непрерывности. Если положить $x=0$, т. е. если перемещаться по оси y , то функция переходит в функцию $u(0, y) = 0$, которая для всех значений y равна нулю; точно так же и по оси x $u(x, 0) = 0$ для всех значений x . Таким образом функция $f(x, y)$ представляет собою в начале координат непрерывную функцию от y , если сохранять постоянным значение $x=0$, и непрерывную функцию от x при постоянном значении $y=0$. Тем не менее эта функция, рассматриваемая как функция от обоих переменных x и y , разрывна при $x=0$ и $y=0$; ибо если взять какую-нибудь отличную от начала координат точку, лежащую хотя бы на прямой $y=x$, то в этой точке $u=1$; поэтому в любой близости от начала имеются точки (x, y) , в которых $u=1$ ¹⁾. Если мы приближаемся к началу вдоль прямой $y=x$,

1) Вообще вдоль прямой $y = x \operatorname{tg} \alpha$, образующей угол α с осью x

$$u = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha;$$

поверхность, изображающая функцию $u = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, образуется движением прямой, перпендикулярной к оси u , начальное положение которой совпадает с осью x и которая вращается вокруг оси u и в то же время подымается или опускается так,

то значение функции стремится не к нулю, а к единице. Таким образом не может быть речи о том, чтобы наша функция была непрерывной в начале координат ¹⁾ или же чтобы было возможно дополнить ее в начале координат до непрерывной функции.

Этот пример показывает, что функция может быть при постоянном x непрерывной относительно y и при постоянном y непрерывной относительно x и все же быть разрывной функцией, если рассматривать ее как функцию от обоих переменных x и y одновременно. Для непрерывности функции существенным является именно то обстоятельство, что значение функции в точке P сколь угодно мало отличается от значения функции в точке Q , как бы мы точку Q ни выбирали, если только она достаточно близка к точке P ; при выборе соседней точки Q мы не имеем права ограничиваться только определенными направлениями, выходящими из точки P .

4. Порядок обращения функции в нуль ²⁾. Если $f(x, y)$ непрерывна в точке (ξ, η) , то это означает, что разность $f(x, y) - f(\xi, \eta)$ стремится к нулю, когда точка (x, y) приближается к точке (ξ, η) . Введя разности координат $h = x - \xi$ и $k = y - \eta$, мы можем это выразить также и следующим образом: функция $\varphi(h, k) = f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi, \eta)$ от h и k имеет пределом нуль, когда h и k одновременно стремятся к нулю.

Такие функции $\varphi(h, k)$, которые стремятся к нулю вместе с h и k , нам часто будут встречаться ³⁾. Совершенно так же, как и для одной независимой переменной, и здесь тоже является для многих целей полезным точнее описать характер исчезания функции $\varphi(h, k)$ при $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ и отличать различные порядки исчезания функции $\varphi(h, k)$ или различные порядки величины $\varphi(h, k)$. Мы употребляем для этого в качестве масштаба расстояние $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ точки с координатами $x = \xi + h$ и $y = \eta + k$ от точки с координатами (ξ, η) и говорим: функция $\varphi(h, k)$, стремящаяся к нулю при $\rho \rightarrow 0$, имеет тот же порядок исчезания или: по меньшей мере тот же порядок исчезания, что и $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, если

что повороту на угол α соответствует подъем на высоту $\sin 2\alpha$. До угла $\alpha = 45^\circ$ прямая подымается до высоты равной 1, затем снова опускается до оси y и ниже до глубины равной -1 , а потом опять начинает подыматься и возвращается к начальному положению — оси x . Такую поверхность, описываемую движущейся прямой, называют *цилиндромидом*; она играет важную роль в механике.

1) Наоборот, функция $u = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $u(0, 0) = 0$ непрерывна в начале (см. дальше, стр. 60). В самом деле

$$|u(h, k) - u(0, 0)| = |hk| \frac{|h^2 - k^2|}{h^2 + k^2} \leq |hk|.$$

В определении непрерывности мы можем поэтому взять $\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\varepsilon}$.

2) Этот номер можно при первом чтении пропустить.

3) В более старой литературе часто встречается выражение: $\varphi(h, k)$ становится одновременно с h и k бесконечно-малой; это выражение имеет совершенно точный смысл, если его просто понимать как другой способ выражения того факта, что $\varphi(h, k)$ стремится вместе с h и k к нулю. Мы однако предпочитаем вовсе не вводить термина „бесконечно-малый“.

существует такая независимая от h и k положительная постоянная C , что

$$\left| \frac{\varphi(h, k)}{\rho} \right| \leq C$$

для всех достаточно малых ρ , т. е. если это имеет место для всех h и k , для которых $0 < \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$, где δ есть некоторая соответствующим образом выбранная положительная величина.

Мы говорим далее: функция $\varphi(h, k)$ имеет высший порядок исчезания¹⁾, чем ρ , если частное $\frac{\varphi(h, k)}{\rho}$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Мы пишем тогда также²⁾

$$\varphi(h, k) = o(\rho).$$

Рассмотрим несколько примеров. Так как

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1 \text{ и } \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1,$$

то компоненты h и k расстояния ρ по направлениям x и y имеют порядок исчезания, по меньшей мере, равный порядку исчезания самого расстояния ρ . То же имеет место и для однородной линейной функции $ah + bk$ с постоянными a и b или для функции $\rho \sin \frac{1}{\rho}$.

Степени ρ^a расстояния ρ при постоянном $a > 1$ имеют порядок исчезания высший, чем порядок ρ , т. е. $\rho^a = o(\rho)$ при $a > 1$. Точно так же однородный квадратный многочлен $ah^2 + bhk + ck^2$ от h и k имеет при $\rho \rightarrow 0$ порядок исчезания более высокий, чем ρ

$$ah^2 + bhk + ck^2 = o(\rho).$$

Вообще вводят следующее определение: Если $\omega(h, k)$ есть некоторая функция сравнения, определенная для всех не обращающихся одновременно в нуль значений h и k в некотором достаточно малом круге с центром в начале координат и которая для всех этих значений h и k отлична от нуля, то мы говорим, что порядок исчезания функции $\varphi(h, k)$ при $\rho \rightarrow 0$, по меньшей мере, равен порядку исчезания функции $\omega(h, k)$, если для соответствующего постоянного C

$$\left| \frac{\varphi(h, k)}{\omega(h, k)} \right| \leq C.$$

¹⁾ Во избежание путаницы следует не упускать из виду, что более высокий порядок исчезания при $\rho \rightarrow 0$ (более быстрое стремление к нулю) означает меньшую величину функции в окрестности $\rho = 0$. Так например порядок исчезания ρ^2 выше порядка исчезания ρ , а величина ρ^2 меньше величины ρ .

²⁾ Буква o употребляется как начальная буква немецкого слова „Ordnung“ (порядок). Если не хотят выразить, что порядок исчезания $\varphi(h, k)$ выше порядка ρ , но лишь хотят сказать, что первая функция имеет по меньшей мере такой же порядок исчезания, как и вторая, то пользуются не обозначением o , но большой буквой O и пишут $\varphi(h, k) = O(\rho)$. Нам однако этим символом не придется пользоваться.

Если же

$$\frac{\varphi(h, k)}{\omega(h, k)} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0,$$

то мы говорим, что порядок исчезания $\varphi(h, k)$ выше порядка исчезания $\omega(h, k)$ и пишем:

$$\varphi(h, k) = o[\omega(h, k)].$$

Например порядок исчезания однородного многочлена

$$ah^2 + bhk + ck^2,$$

по меньшей мере, равен порядку исчезания функции ρ^2 , ибо

$$|ah^2 + bhk + ck^2| \leq \left(|a| + \frac{1}{2}|b| + |c| \right) (h^2 + k^2).$$

Другой пример:

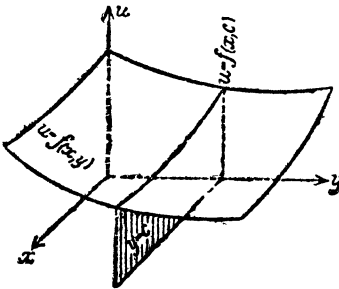
$$\rho = o\left(\frac{1}{|\log \rho|}\right),$$

ибо

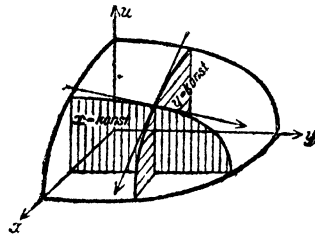
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \log \rho = 0.$$

§ 3. Производные от функции многих переменных.

1. Определение. Геометрическая интерпретация. Если в функции от многих переменных придать всем переменным, за исключением одной, определенные численные значения и рассматривать только одну остающуюся



Черт. 21.



Черт. 22.

переменную, например x , как независимую переменную величину, то мы получаем этим путем функцию от одной только этой переменной. Рассмотрим например функцию $u = f(x, y)$ от двух переменных x и y и придадим y определенное постоянное численное значение, скажем $y = y_0 = c$; получающуюся этим путем функцию $u = f(x, y_0)$ от одной переменной x мы можем наглядно себе представить, пересекая поверхность $u = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$, перпендикулярной к оси y (параллельной плоскости x, u).

Лежащая в этой секущей плоскости линия пересечения изображается уравнением $u = f(x, y_0)$. Дифференцируя известным нам способом эту

функцию от одной переменной x при значении $x = x_0$, — мы предполагаем, что производная, действительно, существует, — т. е., определяя подъем линии пересечения $u = f(x, y_0)$ при $x = x_0$, мы получаем так называемую частную производную функции $f(x, y)$ по x в точке (x_0, y_0) . Она равна, согласно известному нам определению производной, пределу ¹⁾

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Геометрически эта частная производная означает тангенс угла, образуемого касательной к линии пересечения $u = f(x, y_0)$ с прямой параллельной оси x . Она дает нам таким образом подъем поверхности $u = f(x, y)$ по направлению оси x .

Для сокращенного символического обозначения этих частных производных пользуются различными символами, из которых мы приведем прежде всего следующие:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0).$$

Если хотя бы отметить, что частная производная является пределом отношения приращений переменных, то употребляют обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial}{\partial x} f.$$

Мы пользуемся при этом круглым знаком ∂ — вместо прямого d , употребляемого при дифференцировании функции от одной переменной, — чтобы заранее указать, что речь идет о дифференцировании функции от многих переменных по одной из них.

Часто бывает впрочем полезным пользоваться для обозначения дифференцирования упомянутым уже в томе I символом Коши D , записывая так:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f.$$

Совершенно аналогично мы определяем частную производную функции $f(x, y)$ по y в точке (x_0, y_0) с помощью равенства:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0).$$

Геометрически частная производная по y дает меру подъема линии пересечения поверхности $u = f(x, y)$ с плоскостью $x = x_0$, перпендикулярной к оси x . Если мы с тем теперь перемещать точку (x_0, y_0) , которую мы до сих пор считали постоянной, и соответственно этому опустим указатель 0, т. е. если мы продифференцируем функцию $f(x, y)$ во всех точках области,

¹⁾ Если (x_0, y_0) является краевой точкой области существования, то необходимо при этом сделать оговорку, что при предельном переходе точка $(x_0 + h, y_0)$ должна постоянно оставаться внутри области.

в которой эта функция определена, то обе частные производные дадут нам новые функции от x и y :

$$u_x(x, y) = f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ и } u_y(x, y) = f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Например функция $u = x^2 + y^3$ имеет частные производные: $u_x = 2x$ (при дифференцировании по x мы рассматриваем y^2 как постоянную, так что этот член при дифференцировании обращается в нуль) и $u_y = 2y$. Частные производные от $u = x^2y$ суть:

$$u_x = 2xy \text{ и } u_y = x^2.$$

Рассматривая частные производные первого порядка $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ снова как функции от x и y и дифференцируя их в свою очередь по одной из переменных, мы получим, продолжая этот процесс, частные производные высших порядков от $f(x, y)$.

Указывая порядок, в котором мы последовательно дифференцируем функцию, порядком указателей или же символов ∂x и ∂y в „знаменателе“, мы записываем вторые частные производные от $u = f(x, y)$ так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D_{xx}^2 f, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = D_{xy}^2 f, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = D_{yx}^2 f, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D_{yy}^2 f. \end{aligned}$$

Таким же образом мы обозначаем третьи производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx}; \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и вообще производные порядка n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right) &= \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = f_{x^n}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right) &= \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} = f_{x^{n-1}y}; \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Наконец приведем несколько примеров практического выполнения операции дифференцирования. По определению мы считаем постоянными все пере-

менные, кроме той, по которой мы дифференцируем, и данная функция в качестве функции только от этой переменной дифференцируется по правилам дифференцирования функций от одной переменной, так что частное дифференцирование производится по тем же правилам, что и дифференцирование функций от одной переменной.

1. Функция

$$f(x, y) = xy.$$

Первые производные

$$f_x = y, \quad f_y = x.$$

Вторые производные

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1, \quad f_{yy} = 0.$$

2. Функция

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Первые производные

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Для радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ведущего от начала координат к точке (x, y) , частные производные по x и по y равны, следовательно косинусу $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ и синусу $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ угла φ , образуемого радиусом-вектором с осью x .

Вторые производные

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = -\frac{xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}, \\ f_{yy} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}. \end{aligned}$$

3. Функция

$$f(x, y) = e^{xy}.$$

Первые производные

$$f_x = ye^{xy}, \quad f_y = xe^{xy}.$$

Вторые производные

$$f_{xx} = y^2 e^{xy}, \quad f_{xy} = f_{yx} = (xy + 1) e^{xy}, \quad f_{yy} = x^2 e^{xy}.$$

4. Функция

$$f(x, y) = \sin(x + y^2) + \sqrt{x}.$$

Первые производные

$$\begin{aligned} f_x &= \cos(x + y^2) + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ f_y &= 2y \cos(x + y^2). \end{aligned}$$

Вторые производные

$$f_{xx} = -\sin(x + y^2) - \frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -2y \sin(x + y^2),$$

$$f_{yy} = 2 \cos(x + y^2) - 4y^2 \sin(x + y^2).$$

5. Обратный радиус-вектор в пространстве x, y, z :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}.$$

Первые производные

$$f_x = -\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{x}{r^3},$$

$$f_y = -\frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{y}{r^3},$$

$$f_z = -\frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{z}{r^3}.$$

Вторые производные

$$f_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad f_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad f_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5};$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{3xy}{r^5}, \quad f_{yz} = f_{zy} = \frac{3yz}{r^5}, \quad f_{zx} = f_{xz} = \frac{3zx}{r^5}.$$

Отсюда следует, что функция

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

удовлетворяет уравнению:

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0,$$

которое играет большую роль в теории тяготения.

Точно так же, как и для одной независимой переменной, существование частных производных представляет собой особое свойство функции $f(x, y)$ ¹⁾. Все практически важные функции однако обладают этим свойством всюду за исключением, может быть, отдельных особенных точек.

2. Существование частных производных по x и y и непрерывность. Для функций от одной переменной мы убедились, что из существования производной в какой-нибудь точке непосредственно вытекает непрерывность функции в этой точке (т. I, стр. 83). Для функций от многих переменных имеет место вместо этого следующая теорема:

Если для функции $f(x, y)$ в области G всюду существуют обе частные производные f_x и f_y и если эти частные

¹⁾ Относительно выражения „дифференцируемая функция“, которое означает не только то, что частные производные по x и y существуют, см. стр. 60, и след.

производные в области G ограничены, т. е. если существует независимая от x и y верхняя граница M такая, что всюду в области G

$$|f_x(x, y)| < M \text{ и } |f_y(x, y)| < M,$$

то функция $f(x, y)$ непрерывна в области G .

Для доказательства рассмотрим две точки с координатами x, y и $x+h, y+k$, лежащие обе в области G ; предположим также, что и прямоугольная ломаная линия, состоящая из двух отрезков, соединяющих точку (x, y) с точкой $(x+h, y)$ и точку $(x+h, y)$ с точкой $(x+h, y+k)$, также целиком лежит внутри области G . Это безусловно имеет место, если обе точки (x, y) и $(x+h, y+k)$ лежат внутри области и достаточно близки одна к другой.

Тогда

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\} + \{f(x+h, y) - f(x, y)\}.$$

Оба члена первой фигурной скобки справа отличаются друг от друга только значением y , а члены второй скобки — только значением x . Мы можем поэтому преобразовать каждую из этих скобок согласно теореме о среднем значении дифференциального исчисления (т. I, глава II, § 3, n°8), рассматривая первую скобку как функцию от y , а вторую — как функцию от x . Мы получаем:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = kf_y(x+h, y+\vartheta_1 k) + hf_x(x+\vartheta_2 h, y),$$

где ϑ_1 и ϑ_2 суть два числа, содержащиеся между нулем и единицей.

Другими словами, производная по y берется в некоторой точке вертикального отрезка, соединяющего $(x+h, y)$ с $(x+h, y+k)$, а производная по x берется в некоторой точке горизонтального отрезка, соединяющего (x, y) с $(x+h, y)$. Так как, согласно предположению, обе производные по абсолютному значению, во всяком случае, меньше M , то

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y)| < M(|h| + |k|)$$

Правая часть этого неравенства становится при достаточно малых значениях $|h|$ и $|k|$ сколь угодно малой, что и доказывает непрерывность функции $f(x, y)$.

3. Изменение порядка дифференцирования. На примерах стр. 55 и следующих мы видели, что $f_{yx} = f_{xy}$; другими словами, для всех рассмотренных функций мы получали тот же результат, дифференцировали ли мы сначала по y , а затем по x или же сначала по x , а затем по y . Этот факт не является случайным и распространяется на обширный класс функций на основании следующей общей и чрезвычайно важной теоремы:

Если „смешанные“ вторые производные f_{xy} и f_{yx} функции $f(x, y)$ в области G являются непрерывными функциями от x и y , то всюду внутри этой области имеет место равенство:

$$f_{yx} = f_{xy}$$

т. е. мы имеем право изменить порядок дифференцирований по x и y .

Доказательство получается как и в предыдущем номере с помощью теоремы о среднем значении. Мы рассматриваем четыре точки (x, y) , $(x+h, y)$, $(x, y+k)$ и $(x+h, y+k)$, где $h \neq 0$, $k \neq 0$. Если (x, y) является внутренней точкой области G , то при достаточно малых h и k все эти четыре точки вместе со всем определяемым ими прямоугольником лежат внутри G . Составим выражение

$$A = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

Введя функцию

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$$

от одной переменной x , в которой мы y рассматриваем только как „параметр“, мы можем выражение A представить в виде:

$$A = \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

Применяя к правой части теорему о среднем значении, мы получаем:

$$A = h \varphi'(x + \vartheta h),$$

где ϑ лежит между нулем и единицей.

Но

$$\varphi'(x) = f_x(x, y+k) - f_x(x, y);$$

вследствие существования, по условию, „смешанной“ второй производной f_{xy} мы можем правую часть снова преобразовать по теореме о среднем значении, и получаем для A выражение:

$$A = hk f_{xy}(x + \vartheta h, y + \vartheta' k),$$

где ϑ и ϑ' означают два числа между нулем и единицей. Но мы можем также совершенно аналогичным образом исходить из функции

$$\psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

и представить выражение A с помощью равенства:

$$A = \psi(y+k) - \psi(y).$$

Отсюда мы получаем, как и раньше, соотношение:

$$A = hk f_{yx}(x + \vartheta_1 h, y + \vartheta'_1 k),$$

где

$$0 < \vartheta_1 < 1 \text{ и } 0 < \vartheta'_1 < 1.$$

Приравнявая оба выражения, мы получаем равенство:

$$f_{xy}(x + \vartheta h, y + \vartheta' k) = f_{yx}(x + \vartheta_1 h, y + \vartheta'_1 k).$$

Если мы заставим теперь h и k неограниченно убывать и примем во внимание требование, чтобы функции f_{xy} и f_{yx} были непрерывны в точке (x, y) , то мы непосредственно получим равенство:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y),$$

что и требовалось доказать¹⁾.

Из теоремы о переместительности порядка дифференцирования вытекают далеко идущие следствия. Мы прежде всего замечаем, что число различных производных второго и высших порядков для функции от многих переменных значительно меньше, чем можно было первоначально ожидать. Предположим, что все получающиеся в процессе дифференцирования производные являются в рассматриваемой области непрерывными функциями от независимых переменных, и применим нашу теорему вместо функции $u = f(x, y)$ к функциям $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ и т. д. Мы получим тогда равенства:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= f_{x x} = f_{x x}, \\ f_{xy} &= f_{y x} = f_{y x}, \\ f_{xxy} &= f_{yxx} = f_{xyx} = f_{yxx} = f_{yxx} = f_{yxx}, \end{aligned}$$

и вообще мы получаем следующий совершенно общий результат: при многократном дифференцировании функции от двух переменных можно как угодно менять порядок дифференцирования, если только получающиеся производные

1) Для некоторых более тонких исследований важно заметить, что наша теорема о переместительности порядка дифференцирования справедлива и при более слабых ограничениях, а именно достаточно потребовать, чтобы существовала одна только смешанная вторая производная f_{xy} и чтобы она была непрерывной в соответствующей точке. Для доказательства мы исходим из предыдущего равенства:

$$A = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y).$$

делим его на hk и заставим одно только k стремиться к нулю. Тогда правая часть, а следовательно и левая часть имеет предел:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{A}{hk} = \frac{f_y(x + h, y) - f_y(x, y)}{h}.$$

С другой стороны, мы уже доказали выше, что при одном только допущении существования f_{xy} имеем:

$$\frac{A}{hk} = f_{xy}(x + \vartheta h, y + \vartheta' k).$$

Но вследствие предположенной непрерывности f_{xy} мы имеем для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно малых $|h|$ и $|k|$:

$$f_{xy}(x, y) - \varepsilon < f_{xy}(x + \vartheta h, y + \vartheta' k) < f_{xy}(x, y) + \varepsilon,$$

откуда:

$$f_{xy}(x, y) - \varepsilon < \frac{f_y(x + h, y) - f_y(x, y)}{h} < f_{xy}(x, y) + \varepsilon$$

или

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x + h, y) - f_y(x, y)}{h} = f_{xy}(x, y),$$

т. е.

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y).$$

являются непрерывными функциями¹⁾. При выполнении указанных условий непрерывности функция от двух переменных имеет три производные второго порядка:

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$$

четыре производные третьего порядка:

$$f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$$

и вообще $(n+1)$ производные n -го порядка:

$$f_x^n, f_x^{n-1}y, f_x^{n-2}y^2, \dots, f_{xy}^{n-1}, f_y^n.$$

Само собою разумеется, что аналогичная теорема имеет место и для функций от большего, чем два, числа переменных, так как наше доказательство применимо также и для случая изменения порядка дифференцирования по x и z или по y и z и т. д.; ибо при каждой перестановке двух дифференцирований мы должны принимать во внимание только две переменные.

§ 4. Полный дифференциал функции и его геометрическое значение.

1. Понятие дифференцируемости. Для функций от одной переменной существование производной теснейшим образом связано с возможностью приближенно выразить функцию $\eta = f(\xi)$ в окрестности точки x с помощью некоторой линейной функции $\eta = \varphi(\xi)$. Эта линейная функция определяется формулой:

$$\varphi(\xi) = f(x) + (\xi - x)f'(x).$$

Геометрически эта функция выражает в текущих координатах ξ и η касательную к кривой $\eta = f(\xi)$ в точке P с координатами $\xi = x$ и $\eta = f(x)$ и характеризуется аналитически тем, что она отличается от функции $f(\xi)$

¹⁾ Принципиально важно показать на примере что если условие непрерывности второй производной f_{xy} или f_{yx} не выполнено, то наша теорема может и не быть справедливой, так что может случиться что $f_{xy} \neq f_{yx}$. Такой пример нам дает упомянутая уже на стр. 50 непрерывная в начале координат функция

$$(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ с добавочным условием: } f(0, 0) = 0,$$

для которой существуют все производные второго порядка, но они не являются непрерывными функциями.

Мы имеем:

$$f_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y,$$

$$f_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

откуда

$$f_{xy}(0, 0) = -1 \text{ и } f_{yx}(0, 0) = 1.$$

Таким образом эти два выражения не совпадают, что согласно нашей теореме может обуславливаться только разрывностью функции f_{xy} в начале координат.

в окрестности точки P на величину $o(h)$ порядка высшего, чем (стр. 51) порядок разности абсцисс $h = \xi - x$.

Поэтому

$$f(\xi) - f(x) = f(\xi) - f(x) - (\xi - x)f'(x) = o(h),$$

или в другой записи:

$$f(x + h) - f(x) - hf'(x) = o(h) = \varepsilon h,$$

где ε означает число, стремящееся к нулю вместе с h .

Величину $hf'(x)$, „линейную часть приращения“ функции $f(x)$, мы называли в первом томе (глава II, § 3, п° 9) дифференциалом функции $f(x)$ и обозначили через

$$dy = df(x) = hy' = hf'(x)$$

(а также через $dy = y'dx$, так как для функции $y = x$ дифференциал

$$dy = dx = 1 \cdot h).$$

Дифференциал является, как мы можем теперь сказать, функцией от обеих независимых переменных x и h , причем относительно величины h мы не делаем никаких особых предположений. Но этим понятием дифференциала пользуются только тогда, когда величина h настолько мала, что дифференциал $hf'(x)$ представляет собою достаточно точное для соответствующей цели приближение для приращения функции

$$f(x + h) - f(x).$$

Обратно, вместо того, чтобы исходить из понятия производной от функции $f(x)$, можно положить в основу требование, чтобы для функции $\eta = f(\xi)$ в окрестности точки P существовала приближенно ее выражающая линейная функция такая, чтобы разность между данной функцией и ее линейным приближением имела порядок исчезания более высокий, чем приращение независимой переменной. Другими словами: мы требуем, чтобы для функции $f(\xi)$ при значении $\xi = x$ существовала величина A , зависящая от x , но не зависящая от h , такая, что

$$f(x + h) - f(x) = Ah + o(h) = Ah + \varepsilon h,$$

где ε стремится к нулю вместе с h . Это требование равносильно требованию дифференцируемости $f(x)$ при значении x ; в качестве величины A нужно тогда взять производную $f'(x)$ при значении x . Мы в этом непосредственно убеждаемся, написав наше требование в форме:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = A + \varepsilon$$

и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$. Таким образом дифференцируемость по одной переменной и возможность приближения с помощью линейной функции в указанном смысле являются равнозначными свойствами.

Эти понятия мы можем совершенно естественным образом распространить на функции от двух или многих переменных.

Мы говорим, что функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) , если в окрестности этой точки функция $f(\xi, \eta)$ может быть приближенно выражена с помощью линейной функции, т. е. если эта функция может быть представлена следующим образом:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + Ah + Bk + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k,$$

где A и B не зависят от величин h и k , изменяющихся независимо друг от друга, а ε_1 и ε_2 стремятся к нулю вместе с h и k . Другими словами: разность между данной функцией $f(x+h, y+k)$ в точке $(x+h, y+k)$ и линейной относительно h и k функцией $f(x, y) + Ah + Bk$ должна быть величиной порядка $o(\rho)^1$, т. е. порядка высшего, чем порядок расстояния $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ точки $(x+h, y+k)$ от точки (x, y) . Если такое приближенное представление возможно, то отсюда непосредственно следует, что функция $f(x, y)$ имеет в точке (x, y) частные производные и что $f_x = A$ и $f_y = B$.

Ибо, полагая $k=0$ и разделив на h , мы получаем соотношение:

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = A + \varepsilon_1,$$

и так как ε_1 стремится вместе с h к нулю, то при переходе к пределу $h \rightarrow 0$ левая часть, действительно, имеет пределом число A ; таким же образом мы получаем равенство $f_y(x, y) = B$.

Обратно, мы сейчас покажем, что функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в нашем смысле, т. е. допускает приближенное представление с помощью линейной функции, во всяком случае тогда, когда она имеет в соответствующей точке непрерывные частные производные первого порядка. В самом деле, приращение функции

$$\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

может быть представлено в виде:

$$\Delta u = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} + \{f(x, y+k) - f(x, y)\}.$$

Обе скобки мы преобразовываем, как и раньше (стр. 57) по теореме о среднем значении дифференциального исчисления и получаем

$$\Delta u = hf_x(x + \theta_1 h, y+k) + kf_y(x, y + \theta_2 k).$$

¹⁾ Эквивалентность обоих определений доказывается так:

Всегда имеет место неравенство $|\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k| \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}$, где через ε мы обозначаем величину $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = \varepsilon$, стремящуюся к нулю вместе с ε_1 и ε_2 . Таким образом из первого определения дифференцируемости вытекает второе.

Так как далее,

$$|\varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}| \leq |\varepsilon| (|h| + |k|),$$

то при выполнении второго требования рассматриваемая разность имеет вид:

$$\vartheta \varepsilon (|h| + |k|), \text{ где } -1 \leq \vartheta \leq +1,$$

откуда следует, что в этом случае выполняется также и требование, содержащееся в первом определении.

Так как, по условию, частные производные f_x и f_y непрерывны в точке (x, y) , то мы имеем право далее писать:

$$f_x(x + \vartheta_1 h, y + k) = f_x(x, y) + \varepsilon_1 \text{ и } f_y(x + \vartheta_2 k) = f_y(x, y) + \varepsilon_2,$$

причем числа ε_1 и ε_2 стремятся к нулю одновременно с h и k .

Таким образом мы получаем:

$$\Delta u = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \\ + o(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

и это равенство выражает высказанное нами предложение¹⁾.

Функцию с непрерывными первыми производными мы будем иногда также называть непрерывно дифференцируемой функцией. Если и все производные второго порядка также непрерывны, то мы функцию называем дважды непрерывно дифференцируемой и т. д.

Непосредственно очевидно, что все наши рассуждения распространяются на функции от трех и большего числа переменных.

2. Дифференцирование по данному направлению. Дифференцируемые функции обладают тем важным свойством, что они имеют частные производные не только по x и по y или, как мы также говорим, по направлению x и y , но они дифференцируемы также по всякому другому направлению. При этом мы понимаем под производной по направлению α следующее:

Заставим точку $(x + h, y + k)$ стремиться к точке (x, y) и притом так, чтобы она двигалась по прямой, проходящей через (x, y) и образующей постоянный угол α с положительной осью x -ов. Другими словами: h и k стремятся к нулю уже не как угодно независимо друг от друга, но удовлетворяя соотношениям:

$$h = \rho \cos \alpha \text{ и } k = \rho \sin \alpha,$$

где $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ означает расстояние точки $(x + h, y + k)$ от точки (x, y) и стремится к нулю вместе с h и k .

Взяв тогда разность $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ и разделив ее на ρ , мы называем предел

$$D^{(\alpha)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \sin \alpha) - f(x, y)}{\rho},$$

если таковой существует, производной от функции $f(x, y)$ в точке (x, y) по направлению α . В частном случае при $\alpha = 0$, т. е. при $k = 0$ и $h = \rho$, мы получаем частную производную по x , а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $h = 0$ и $k = \rho$, мы получаем частную производную по y .

Если теперь функция $f(x, y)$ дифференцируема, то имеет место соотношение:

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf_x + kf_y + \varepsilon \rho = \rho(f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha + \varepsilon).$$

¹⁾ Если мы предполагаем только существование, но не непрерывность производных f_x и f_y , то функция может и не быть дифференцируемой (стр. 66 и сл.).

При $\rho \rightarrow 0$ число ε также стремится к нулю, и мы получаем для производной по направлению α выражение:

$$D^{(\alpha)} f(x, y) = f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha;$$

производная по направлению α представляет собою таким образом линейную комбинацию производных f_x и f_y по направлениям x и y с коэффициентами $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Э от результата имеет место во всяком случае тогда, когда производные f_x и f_y существуют и непрерывны в соответствующей точке.

Например для радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. расстояния точки (x, y) от начала частные производные суть:

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \text{и} \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

где φ означает угол радиуса-вектора r с осью x -ов. Поэтому радиус-вектор r имеет по направлению α производную:

$$D^{(\alpha)} r = r_x \cos \alpha + r_y \sin \alpha = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha = \cos(\varphi - \alpha);$$

в частности, производная r по его собственному направлению равна единице, а по направлению, к нему перпендикулярному, равна нулю.

Для x мы получаем по направлению радиуса-вектора, т. е. при $\alpha = \varphi$ производную $D^{(\varphi)} x = \cos \varphi$, а для y производную $D^{(\varphi)} y = \sin \varphi$; по перпендикулярному же к радиусу-вектору направлению мы имеем:

$$D^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} x = -\sin \varphi; \quad D^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} y = \cos \varphi.$$

Производную от функции $f(x, y)$ по направлению радиуса-вектора r мы обозначаем также символом $\frac{\partial f(x, y)}{\partial r}$.

Мы получаем тогда очень часто применяемое соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y},$$

где $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ означают символы дифференцирования, после которых можно поставить любую дифференцируемую функцию u от x и y .

Полезно moreover заметить, что производную от функции $f(x, y)$ по направлению α мы получаем также и в том случае, когда точка Q с координатами $x+h$ и $y+k$ стремится к точке P с координатами x и y не прямолинейно по направлению α , а по произвольной кривой, касательная которой в точке P имеет направление α . В самом деле, если прямая PQ имеет направление β , то $h = \rho \cos \beta$ и $k = \rho \sin \beta$, и мы должны в формулах, примененных нами выше при доказательстве, заменить α через β . Но при $\rho \rightarrow 0$ угол β , согласно предположению, стремится к α , и мы опять получаем наше прежнее выражение для $D^{(\alpha)} f(x, y)$.

Совершенно таким же образом мы можем дифференцировать по какому угодно направлению в пространстве всякую дифференцируемую функцию

$f(x, y, z)$ от трех переменных. В пространстве всякое направление задается косинусами трех углов, образуемых этим направлением с осями координат.

Обозначая эти углы через α, β, γ и рассматривая наряду с точкой (x, y, z) точку $(x+h, y+k, z+l)$, где

$$h = \rho \cos \alpha; \quad k = \rho \cos \beta; \quad l = \rho \cos \gamma,$$

мы получаем совершенно так же, как и раньше, для производной от данной функции по направлению, заданному углами (α, β, γ) , выражение:

$$f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta + f_z \cos \gamma.$$

3. Геометрическое истолкование. Касательная плоскость. Очень легко геометрически истолковать все эти понятия для функции $u = f(x, y)$. Подобно тому, как частная производная по x дает подъем касательной к линии пересечения нашей поверхности с плоскостью, перпендикулярной к плоскости x, y и параллельной плоскости x, u , так и производная по направлению α означает подъем линии пересечения поверхности с плоскостью, перпендикулярной к плоскости x, y и образующей угол α с осью x . Формула $D^{(\alpha)} f(x, y) = f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha$ показывает, что подъемы касательных ко всем этим плоским линиям пересечения, т. е. подъемы всех касательных к поверхности в некоторой точке, выражаются линейно через подъемы двух касательных.

Мы выразили приближенно дифференцируемую функцию $\xi = f(\xi, \eta)$ в точке (x, y) с помощью линейной функции:

$$l(\xi, \eta) = f(x, y) + (\xi - x)f_x + (\eta - y)f_y,$$

где ξ и η означают текущие координаты. Геометрическим изображением этой линейной функции является плоскость, которую мы по аналогии с касательной к плоской кривой называем касательной плоскостью. Разность между этой линейной функцией и функцией $f(\xi, \eta)$ стремится к нулю вместе с $\xi - x = h$ и $\eta - y = k$ и притом быстрее, чем $\sqrt{h^2 + k^2}$. Но согласно определению касательной к плоской кривой это означает, что линия пересечения касательной плоскости с какой-нибудь плоскостью, перпендикулярной к плоскости x, y , является касательной к линии пересечения поверхности с этой плоскостью. Мы видим таким образом, что эти касательные к поверхности в точке (x, y, u) лежат все в одной плоскости, а именно в касательной плоскости к поверхности.

Это свойство является геометрическим выражением дифференцируемости нашей функции в точке с координатами $x, y, u = f(x, y)$. В качестве уравнения касательной плоскости в текущих координатах ξ, η, ζ напомним еще раз:

$$\zeta - u = (\xi - x)f_x + (\eta - y)f_y.$$

Как было доказано раньше на стр. 62, функция несомненно дифференцируема, если в соответствующей точке частные производные непрерывны. В противоположность тому, что мы видели для функций от одной независимой переменной, одного только существования частных производ-

ных f_x и f_y еще недостаточно для дифференцируемости функции. Если производные в некоторой точке не непрерывны, то поверхность может в этой точке и не иметь касательной плоскости, или, выражаясь аналитически, разность между $f(x+h, y+k)$ и линейной относительно h и k функцией $f(x, y) + hf_x(x, y) + kf_y(x, y)$ может быть величиной, порядок исчезания которой не выше порядка величины $\sqrt{h^2 + k^2}$. Поясним это на простом примере. Положим:

$$f(x, y) = 0 \text{ вдоль прямой } x=0 \text{ и прямой } y=0, \\ f(x, y) = |x| \text{ при } x=y=0 \text{ или } x+y=0.$$

Между этими прямыми мы определяем функцию $f(x, y)$ так, чтобы она геометрически изображалась соответствующими плоскостями. Поверхность $u=f(x, y)$ состоит таким образом из восьми плоских углов, приложенных друг к другу, и ребра которых находятся над прямыми

$$x=0, \quad y=0 \quad y=x \text{ и } y=-x.$$

Эта поверхность очевидно не имеет в начале координат касательной плоскости, хотя обе производные $f_x(0, 0)$ и $f_y(0, 0)$ существуют, а именно равны нулю. Но эти производные не непрерывны в начале координат; на ребрах эти производные, как в этом легко убедиться, даже вовсе не существуют¹⁾ обе одновременно нигде, кроме точки $x=0, y=0$.

4. Полный дифференциал функции. Как для функций от одной переменной, так и для функций от многих переменных часто оказывается полезным ввести для линейной части дифференцируемой функции $u=f(x, y)$ особое

1) Другой пример такого же типа представляет функция:

$$u=f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ при } x^2+y^2 \neq 0, \\ u=0 \text{ при } x=0, \quad y=0;$$

вводя полярные координаты, получаем:

$$u=\frac{r}{2} \sin 2\varphi.$$

Первые производные существуют всюду в окрестности начала координат и обращаются в нуль в самом начале координат, но они в окрестности этой точки не непрерывны, ибо например

$$u_x = y \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \right) = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}.$$

Если приближаться к началу координат вдоль оси x , то u_x стремится к нулю; если же приближаться к началу по оси y то u_x стремится к 1. Эта функция не дифференцируема в начале координат, и поверхность $u=f(x, y)$ не имеет в этой точке касательной плоскости, ибо так как $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, то эта касательная плоскость должна была бы, согласно полученному выше уравнению касательной плоскости, совпасть с плоскостью $u=0$; но вдоль прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$ мы имеем: $\sin 2\varphi = 1$ и $u = \frac{r}{2}$, так что расстояние точки поверхности от плоскости $u=0$ представляет собою величину, порядок исчезания которой не выше порядка исчезания r , и плоскость $u=0$ не удовлетворяет следовательно вышеприведенному определению касательной плоскости.

словесное • символическое обозначение; мы называем эту линейную часть дифференциалом функции и пишем:

$$du = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Дифференциал, или, как обычно говорят, полный дифференциал представляет собою функцию от четырех независимых переменных, а именно, во-первых, от координат x и y соответствующей точки и, во-вторых, приращений $h = dx$ и $k = dy$. Вряд ли нам необходимо еще раз подчеркнуть, что это понятие дифференциала не имеет ничего общего с неясным понятием „бесконечно малой“ величины: его значение заключается только в том, что du является тем лучшим приближением приращения $\Delta u = f(x + h, y + k) - f(x, y)$, получаемого функцией $u = f(x, y)$ при увеличении аргумента x на $h = dx$ и аргумента y на $k = dy$, чем меньше h и k . Кроме того, получив выражение для дифференциала, мы имеем формулу, объединяющую выражения различных частных производных и дающую возможность непосредственно вычислить каждую из этих производных в отдельности. Так например мы получаем из полного дифференциала частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$, полагая $dy = 0$ и $dx = 1$. Подчеркнем еще раз, что

только тогда, действительно, имеет смысл говорить о полном дифференциале функции $f(x, y)$, если эта функция дифференцируема в смысле данного нами выше определения (для чего достаточным является условие непрерывности, но ни в коем случае условие одного только существования обеих производных по x и y).

Если функция $f(x, y)$ имеет также непрерывные частные производные высших порядков, то можно от дифференциала $df(x, y)$ образовать в свою очередь дифференциал, т. е. умножить его частные производные по x и y на $h = dx$ и $k = dy$ и затем эти произведения сложить. При дифференцировании мы должны величины $h = dx$ и $k = dy$ рассматривать как постоянные, помня, что дифференциал $df = hf_x + kf_y$ является функцией от четырех переменных x, y, h и k . Мы получаем таким путем второй дифференциал функции:

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right) h + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right) k = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Соответственным образом мы получим дальше дифференциалы высших порядков:

$$\begin{aligned} d^3f &= d(d^2f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3, \\ d^4f &= d(d^3f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + \\ &\quad + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4. \end{aligned}$$

и вообще, как легко можно доказать переходом от n к $n+1$:

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} dx dy^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Это последнее выражение мы можем также представить символически с помощью равенства:

$$d^n f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(n)} = (f_x dx + f_y dy)^{(n)},$$

где стоящее справа выражение должно быть сначала формально раскрыто согласно биному Ньютона, а затем произведения и степени величин $\frac{\partial f}{\partial x} dx$ и $\frac{\partial f}{\partial y} dy$ должны быть заменены соответствующими выражениями:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Совершенно аналогичные результаты получаются и для функций от многих переменных.

5. Применение к теории ошибок. Практическая польза, доставляемая дифференциалом $df = hf_x + kf_y$, функции $f(x, y)$ в качестве удобного для вычислений приближенного значения действительного приращения функции $\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y)$ при переходе от (x, y) к $(x+h, y+k)$, обнаруживается в различных применениях математики и особенно в так называемой теории ошибок (т. I, стр. 305). Пусть например требуется оценить возможную ошибку при определении плотности s твердого тела способом взвешивания тела в воздухе и в воде. Если через m обозначить вес тела в воздухе, а через \bar{m} его вес в воде, то по закону Архимеда потеря в весе $m - \bar{m}$ дает вес вытесненного этим телом количества воды или численно ему равный объем этого количества воды, а следовательно и объем данного тела. Поэтому плотность s получается в виде функции $s = \frac{m}{m - \bar{m}}$ от двух независимых переменных m и \bar{m} . Ошибка при определении величины s , обусловленная ошибками dm и $d\bar{m}$, допускаемыми при определении m и \bar{m} , приближенно выражается полным дифференциалом:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial m} dm + \frac{\partial s}{\partial \bar{m}} d\bar{m}.$$

Частные производные получаются по правилу дифференцирования частного

$$\frac{\partial s}{\partial m} = -\frac{\bar{m}}{(m - \bar{m})^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial \bar{m}} = \frac{m}{(m - \bar{m})^2}.$$

Поэтому дифференциал равен:

$$ds = \frac{-\bar{m}dm + m d\bar{m}}{(m - \bar{m})^2}.$$

Эта ошибка достигает своей максимальной величины, если например dm имеет абсолютно наибольшее отрицательное значение, а $d\bar{m}$ абсолютно наибольшее положительное значение, т. е. если при измерении мы получаем вместо m меньшее, чем m значение $m + dm$, а вместо \bar{m} значение $\bar{m} + d\bar{m}$, превосходящее \bar{m} . Так например плотность куска латуни, весящего в воздухе приблизительно 100 г с точностью до 5 мг, а в воде приблизительно 88 г с возможной погрешностью до 8 мг, может быть приближенно определена с точностью до

$$\frac{88 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{12^2} \approx 9 \cdot 10^{-3}$$

или с точностью до 1%.

§ 5. Сложные функции и их производные.

1. Общие замечания. Правило дифференцирования сложных функций. Для того чтобы уметь совершенно свободно обращаться с действием дифференцирования каких угодно функций от многих переменных, мы должны прежде всего точно так же, как и для одной переменной, ознакомиться с дифференцированием сложных функций. Часто бывает, что функция u от обеих переменных x и y составляется из ряда выражений ξ, η, ζ, \dots , которые в отдельности легко дифференцируются по x и y . Это приводит нас естественным образом к тому, чтобы рассматривать u как функцию от переменных ξ, η, ζ, \dots : $u = f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$, причем ξ, η, ζ, \dots являются в свою очередь функциями от x и y , т. е. $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\zeta = \chi(x, y), \dots$. Задача таким образом сводится к дифференцированию сложной функции

$$u = f(\xi, \eta, \zeta, \dots) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \chi(x, y), \dots] = F(x, y).$$

Если нам например приходится иметь дело с функциями

$u = e^{xy} \sin(x + y)$ или $u = \frac{1}{x} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \log \sin(x - y)$, то мы можем например положить

$$xy = \xi, \quad x + y = \eta \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = \xi, \quad 1 - x^2 - y^2 = \eta, \quad \sin(x - y) = \zeta,$$

и получаем тогда:

$$u = e^{\xi} \sin \eta \quad \text{или} \quad u = \xi^{\frac{1}{2}} \log \zeta.$$

Для уточнения понятий сделаем следующие предположения: пусть функции $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\zeta = \chi(x, y), \dots$ дифференцируемы в некоторой области G плоскости x, y ; когда точка (x, y) пробегает эту область, то точка с координатами ξ, η, ζ перемещается в пространстве ξ, η, ζ, \dots , и мы предполагаем, что эта точка остается при этом внутри некоторой области B пространства ξ, η, ζ , в которой функция $f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$ дифференцируема. Так например рассмотрим функцию $u = g(x, y)e^{h(x, y)}$.

Пусть обе функции $\xi = g(x, y)$ и $\eta = h(x, y)$ определены и дифференцируемы в области G , например в круге $x^2 + y^2 \leq 1$. Когда точка (x, y) пробегает эту круговую область, то точка (ξ, η) описывает некоторую часть плоскости ξ, η . Но функция $u = \xi e^\eta$ от ξ и η определена и дифференцируема во всей плоскости ξ, η . Поэтому не представляет никаких затруднений рассматривать сложную функцию $u = g(x, y)e^{h(x, y)}$ в круговой области G плоскости x, y .

Мы покажем, что составленная таким путем из дифференцируемых функций сложная функция снова дифференцируема ¹⁾ и что ее производные вычисляются очень простым путем.

Наши условия дифференцируемости заключаются в следующем: если независимые переменные x и y получают приращения Δx и Δy , то величины ξ, η, ζ, \dots получают приращения вида:

$$\Delta \xi = \varphi_x \Delta x + \varphi_y \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \gamma_1 \Delta y,$$

$$\Delta \eta = \phi_x \Delta x + \phi_y \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

$$\Delta \zeta = \chi_x \Delta x + \chi_y \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \gamma_3 \Delta y,$$

где числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ стремятся к нулю вместе с Δx и Δy или с $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Далее, если ξ, η, ζ, \dots получают приращение $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta, \dots$ то функция

$$u = f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

получает приращение вида:

$$\Delta u = f_\xi \Delta \xi + f_\eta \Delta \eta + f_\zeta \Delta \zeta + \dots + \delta_1 \Delta \xi + \delta_2 \Delta \eta + \delta_3 \Delta \zeta + \dots,$$

где величины $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ стремятся к нулю одновременно с $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta, \dots$ (или же могут быть в точности приравнены нулю, если соответствующие приращения $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta, \dots$ обращаются в нуль).

Примем теперь в последнем выражении в качестве приращений $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta, \dots$ написанные выше выражения для этих приращений, обусловленных изменением переменных x и y на Δx и Δy . Мы получаем непосредственно

$$\Delta u = (f_\xi \varphi_x + f_\eta \phi_x + f_\zeta \chi_x + \dots) \Delta x + (f_\xi \varphi_y + f_\eta \phi_y + f_\zeta \chi_y + \dots) \Delta y + \varepsilon \Delta x + \gamma \Delta y,$$

где ε и γ составлены из величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, а именно:

$$\varepsilon = f_\xi \varepsilon_1 + f_\eta \varepsilon_2 + f_\zeta \varepsilon_3 + \dots + \phi_x \delta_1 + \phi_y \delta_2 + \chi_x \delta_3 + \dots + \varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 + \varepsilon_3 \delta_3 + \dots$$

$$\gamma = f_\xi \gamma_1 + f_\eta \gamma_2 + f_\zeta \gamma_3 + \dots + \varphi_y \delta_1 + \varphi_x \delta_2 + \chi_y \delta_3 + \dots + \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 + \gamma_3 \delta_3 + \dots$$

¹⁾ Если вместо дифференцируемости потребовать только непрерывность рассматриваемых функций, то остается справедливым тот факт, что непрерывная функция от непрерывных функций снова непрерывна. Весьма простое доказательство этой теоремы мы можем здесь опустить.

Справа стоят суммы произведений, в которых по крайней мере один множитель равен одной из величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$. Мы видим отсюда, что ε и γ стремятся к нулю одновременно с Δx и Δy . Согласно результатам предыдущего параграфа это означает следующее: Если $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\zeta = \chi(x, y)$ суть дифференцируемые функции от x и y , а $f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$ является дифференцируемой функцией от ξ, η, ζ, \dots , то и сложная функция

$$u = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \chi(x, y), \dots] = F(x, y)$$

дифференцируема в качестве функции от x, y и ее частные производные задаются формулами:

$$\begin{aligned} u_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + f_\zeta \zeta_x + \dots, \\ u_y &= f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + f_\zeta \zeta_y + \dots \end{aligned}$$

Таким образом для того, чтобы образовать частную производную по x , мы должны продифференцировать сложную функцию по всем величинам, зависящим от x , каждую из этих частных производных умножить на производную по x от соответствующей величины и все эти произведения сложить. Это правило представляет собой обобщение правила дифференцирования сложной функции на функции от двух переменных.

Полученный нами результат может быть записан в чрезвычайно простом и ясном виде, если воспользоваться понятием полного дифференциала. Он выражается просто следующим равенством:

$$\begin{aligned} du &= f_\xi d\xi + f_\eta d\eta + f_\zeta d\zeta + \dots = \\ &= f_\xi(\xi_x dx + \xi_y dy) + f_\eta(\eta_x dx + \eta_y dy) + f_\zeta(\zeta_x dx + \zeta_y dy) + \dots = \\ &= (f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + f_\zeta \zeta_x + \dots) dx + (f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + f_\zeta \zeta_y + \dots) dy. \end{aligned}$$

Смысл этого равенства может быть формулирован так:

Для того чтобы вычислить линейную часть приращения сложной функции $u = f(\xi, \eta, \zeta, \dots) = F(x, y)$, мы сначала образуем линейную часть приращения этой функции так, как если бы ξ, η, ζ, \dots были бы независимыми переменными, а затем заменяем дифференциалы $d\xi, d\eta, d\zeta, \dots$ линейными частями приращений функций $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\zeta = \chi(x, y), \dots$. Этот факт, представляющий собой непосредственное выражение проведенных нами выше рассуждений, в особенно выпуклой форме показывает, насколько удобной и гибкой является запись с помощью дифференциалов.

Чтобы вычислить частные производные высших порядков, мы должны правые части предыдущих равенств снова дифференцировать по x и y , причем мы должны с функциями $f_\xi, f_\eta, f_\zeta, \dots$ снова поступать как со сложными функциями. Мы получаем таким путем, если ограничиться простоты ради тремя функциями ξ, η и ζ :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= f_{\xi\xi} \xi_x^2 + f_{\eta\eta} \eta_x^2 + f_{\zeta\zeta} \zeta_x^2 + 2f_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + 2f_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x + 2f_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x + \\ &\quad + f_{\xi\xi x} \xi_x + f_{\eta\xi x} \eta_x + f_{\zeta\xi x} \zeta_x, \\ u_{xy} &= f_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + f_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + f_{\zeta\zeta} \zeta_x \zeta_y + f_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + f_{\eta\zeta} (\eta_x \zeta_y + \eta_y \zeta_x) + \\ &\quad + f_{\xi\zeta} (\xi_x \zeta_y + \xi_y \zeta_x) + f_{\xi\xi y} \xi_y + f_{\eta\xi y} \eta_y + f_{\zeta\xi y} \zeta_y, \\ u_{yy} &= f_{\xi\xi} \xi_y^2 + f_{\eta\eta} \eta_y^2 + f_{\zeta\zeta} \zeta_y^2 + 2f_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + 2f_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y + 2f_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y + \\ &\quad + f_{\xi\xi y} \xi_y + f_{\eta\xi y} \eta_y + f_{\zeta\xi y} \zeta_y. \end{aligned}$$

Первые члены напоминают формулу для второго дифференциала; но к ним еще присоединяются члены, содержащие вторые производные функций ξ , η и ζ .

2. Примеры.

1. Рассмотрим функцию:

$$u = e^{x^2 \sin^2 y} + 2xy \sin x \sin y + y^2.$$

Положим:

$$\xi = x^2 \sin^2 y, \quad \eta = 2xy \sin x \sin y, \quad \zeta = y^2.$$

Мы получаем:

$$\begin{aligned} \xi_x &= 2x \sin^2 y, \quad \eta_x = 2y \sin x \sin y + 2xy \cos x \sin y, \quad \zeta_x = 0, \\ \xi_y &= 2x^2 \sin y \cos y, \quad \eta_y = 2x \sin x \sin y + 2xy \sin x \cos y, \quad \zeta_y = 2y, \\ u_\xi &= u_\eta = u_\zeta = e^{\xi + \eta + \zeta}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} u_x &= 2e^{x^2 \sin^2 y + 2xy \sin x \sin y + y^2} (x \sin^2 y + y \sin x \sin y + xy \cos x \sin y), \\ u_y &= 2e^{x^2 \sin^2 y + 2xy \sin x \sin y + y^2} (x^2 \sin y \cos y + x \sin x \sin y + xy \sin x \cos y + y). \end{aligned}$$

2. Для функции

$$u = \sin(x^2 + y^2)$$

мы полагаем

$$\xi = x^2 + y^2$$

и получаем:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \cos(x^2 + y^2), \quad u_y = 2y \cos(x^2 + y^2); \\ u_{xx} &= -4x^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2); \\ u_{xy} &= -4xy \sin(x^2 + y^2); \quad u_{yy} = -4y^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

3. Для функции

$$u = \arctg(x^2 + xy + y^2)$$

полагаем

$$\xi = x^2, \quad \eta = xy, \quad \zeta = y^2$$

и получаем:

$$u_x = \frac{2x + y}{1 + (x^2 + xy + y^2)^2}; \quad u_y = \frac{x + 2y}{1 + (x^2 + xy + y^2)^2}.$$

4. Часто приходится дифференцировать по x и y функцию $F(r, \varphi)$ от полярных координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Так как

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \\ \varphi_x &= -\frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{r^2}; \quad \varphi_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{r^2}, \end{aligned}$$

то мы получаем отсюда:

$$f_x = f_r r_x + f_\varphi \varphi_x = f_r \frac{x}{r} - f_\varphi \frac{y}{r^2} = f_r \cos \varphi - \frac{f_\varphi}{r} \sin \varphi,$$

$$f_y = f_r r_y + f_\varphi \varphi_y = f_r \frac{y}{r} + f_\varphi \frac{x}{r^2} = f_r \sin \varphi + \frac{f_\varphi}{r} \cos \varphi.$$

Далее

$$f_{xx} = f_{rr} \cos^2 \varphi + \frac{f_{\varphi\varphi}}{r^2} \sin^2 \varphi - 2 \frac{f_{r\varphi}}{r} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{f_r}{r} \sin^2 \varphi + 2 \frac{f_\varphi}{r^2} \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$f_{yy} = f_{rr} \sin^2 \varphi + \frac{f_{\varphi\varphi}}{r^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{f_{r\varphi}}{r} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{f_r}{r} \cos^2 \varphi - 2 \frac{f_\varphi}{r^2} \cos \varphi \sin \varphi.$$

Отсюда получается следующая формула преобразования в полярные координаты для часто встречающегося так называемого выражения Лапласа $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ (играющего большую роль в теории потенциала):

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{f_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{f_r}{r} = \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Первая из двух формул дифференцирования функции $f(x, y)$ по r и φ :

$$f_r = f_x \cdot \frac{x}{r} + f_y \cdot \frac{y}{r} = f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi,$$

$$f_\varphi = -f_x \cdot y + f_y \cdot x = -f_x r \sin \varphi + f_y r \cos \varphi,$$

нам уже встретилась раньше на стр. 64 при дифференцировании $f(x, y)$ по направлению радиуса-вектора r .

Полученные результаты непосредственно переносятся и на случай большего числа независимых переменных. Точно так же наши формулы сохраняют свою справедливость и в том случае, когда величины ξ, η, ζ, \dots являются функциями только от одной переменной x . В этом случае составленная из ξ, η, ζ, \dots функция является функцией только от x , и производные этой функции $u = F(x)$ по x вычисляются с помощью формул:

$$u' = f_\xi \xi' + f_\eta \eta' + f_\zeta \zeta' + \dots,$$

$$u'' = f_{\xi\xi} \xi'^2 + 2f_{\xi\eta} \xi' \eta' + \dots + f_{\xi\xi''} + f_{\eta\eta''} + f_{\zeta\zeta''} + \dots \text{ и т. д.}$$

В сущности говоря, такие функции нам уже встречались раньше в первом томе, но мы там не подходили к ним явно с такой точки зрения. Так например мы теперь могли бы писать:

$$g(x)^{h(x)} = \xi^\eta = f(\xi, \eta), \text{ где } \xi = g(x) \text{ и } \eta = h(x).$$

Наше правило дифференцирования даст нам теперь:

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx} &= f_{\xi} \xi' + f_{\eta} \eta' = r_1 \xi'^{r_1-1} \xi' + \xi^n \log \xi \cdot \eta' = \\ &= g(x)^{h(x)} \left\{ h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} + h'(x) \log g(x) \right\}.\end{aligned}$$

Частный случай этой формулы нами уже был получен раньше в первом томе (стр. 176) с помощью несколько искусственного приема.

§ 6. Теорема о среднем значении и формула Тэйлора для функций от многих переменных.

1. Постановка проблемы и предварительные замечания. В первом томе (гл. VI, § 2) мы видели, каким образом можно получить для функции от одной независимой переменной, имеющей производные до $n+1$ -го порядка включительно, целую рациональную функцию n -й степени, приближенно выражающую данную функцию в окрестности некоторой точки с точностью выше n -го порядка; эту целую рациональную функцию мы назвали „аппроксимирующим многочленом Тэйлора“. То приближение с помощью линейной части функции, которое дается дифференциалом, является лишь первым шагом в направлении получения этих все более и более точных приближений. Мы можем и теперь для случая многих независимых переменных, например для двух переменных, попытаться приближенно выразить данную функцию в окрестности определенной точки с помощью многочлена n -й степени. Вопрос сводится таким образом к тому, чтобы получить возможность для любого n приближенно выразить функцию $f(x+h, y+k)$ с помощью многочлена n -й степени относительно приращений h и k с коэффициентами, зависящими от точки (x, y) . Этот многочлен мы, как и раньше, называем „аппроксимирующим многочленом Тэйлора“.

Эта задача легко сводится к соответствующей задаче для функций от одной независимой переменной с помощью следующего очень простого приема. Рассмотрим вместо функции $f(x+h, y+k)$, выражение:

$$F(t) = f(x+ht, y+kt),$$

вводя вспомогательную величину t .

Будем временно считать x, y, h и k постоянными, так что $F(t)$ будет функцией от одной независимой переменной t . Когда t изменяется от 0 до 1, точка с координатами $x+ht$ и $y+kt$ пробегает прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x, y) и $(x+h, y+k)$.

Вычислим сначала производные от $F(t)$. Предположив относительно функции $f(x, y)$, что все производные, которые появятся в дальнейшем, непрерывны, мы получаем, по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned}F'(t) &= hf_x + kf_y, \\ F''(t) &= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

И вообще для n -й производной мы получаем, как мы можем в этом легко убедиться переходом от m к $m+1$, следующее выражение:

$$F^{(n)}(t) = h^n f_{x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y} + \binom{n}{2} h^{n-2} k^2 f_{x^{n-2}y^2} + \dots + k^n f_{y^n},$$

которое мы можем символически записать, как и на стр. 68 в форме

$$F^{(n)}(t) = (hf_x + kf_y)^{(n)}.$$

Стоящие в правой части скобки мы формально раскрываем согласно биному Ньютона и заменяем затем степени и произведения величин

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}$$

соответствующими производными n -го порядка

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}, \dots$$

При этом во всех этих производных мы должны в качестве аргументов писать вместо величин x и y величины $x+ht$ и $y+kt$.

2. Теорема о среднем значении. Исходным пунктом для получения нашего аппроксимирующего многочлена служит теорема о среднем значении, аналогичная уже известной нам теореме о среднем значении для случая одной независимой переменной.

Эта теорема связывает приращение функции $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ с частными производными f_x и f_y .

При этом мы определенно предполагаем непрерывность этих частных производных. Мы исходим из теоремы о среднем значении для функции $F(t)$ от одной независимой переменной t и записываем ее в форме:

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(\vartheta t),$$

где ϑ есть некоторое число, содержащееся между 0 и 1, и получаем отсюда непосредственно формулу:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+ht, y+kt) - f(x, y)}{t} &= \\ &= hf_x(x+\vartheta ht, y+\vartheta kt) + kf_y(x+\vartheta ht, y+\vartheta kt). \end{aligned}$$

Полагая здесь $t=1$, мы получаем искомую теорему о среднем значении для функций от двух переменных в форме:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= hf_x(x+\vartheta h, y+\vartheta k) + kf_y(x+\vartheta h, y+\vartheta k) = \\ &= hf_x(\xi, \eta) + kf_y(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Таким образом разность значений функции в точках

$$(x+h, y+k) \text{ и } (x, y)$$

равняется дифференциалу, образованному для некоторой промежуточной точки (ξ, η) , лежащей на прямолинейном отрезке, соединяющем обе точки.

Обратим при этом внимание на то, что при определении промежуточных значений обоих приращений мы пользуемся как для f_x , так и для f_y одной и той же дробью ϑ .

В качестве простого следствия из теоремы о среднем значении я доказываю следующую теорему.

Функция $f(x, y)$, частные производные которой f_x и f_y в некоторой области всюду существуют и равны нулю, есть постоянная. В самом деле, обращение в нуль правой части равенства, выражающего теорему о среднем значении, влечет за собой обращение в нуль левой части этого равенства; но это означает, так как значения h и k взяты совершенно произвольно, что функция имеет всюду в рассматриваемой области одно и то же значение. Так как обратно функция $f(x, y) = C$, где C постоянная, изображается плоскостью, параллельной плоскости x, y , и обе ее частные производные f_x и f_y всюду существуют и равны нулю, то отсюда следует, что обращение в нуль производных f_x и f_y является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $f(x, y)$ была постоянной.

3. Формула Тэйлора для функций от многих переменных. Применяя к функции $F(t)$ формулу Тэйлора с остаточным членом Лагранжа (т. I, глава VI) и полагая затем $t=1$, мы получаем совершенно аналогичным образом формулу Тэйлора для двух независимых переменных:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \{hf_x(x, y) + kf_y(x, y)\} + \\ &+ \frac{1}{2!} \{h^2f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2f_{yy}(x, y)\} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \left\{ h^n f_{x^n}(x, y) + \binom{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y}(x, y) + \dots + k^n f_{y^n}(x, y) \right\} + R_n, \end{aligned}$$

причем остаточный член R_n можно в символической форме записать так:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \{hf_x(x+\vartheta h, y+\vartheta k) + kf_y(x+\vartheta h, y+\vartheta k)\}^{(n+1)},$$

$$0 < \vartheta < 1.$$

Однородные многочлены первой, второй, ..., n -й и $n+1$ -й степени относительно h, k , на которые согласно этой формуле разлагается приращение $f(x+h, y+k) - f(x, y)$, получаемое функцией $f(x, y)$ при переходе от точки (x, y) к точке $(x+h, y+k)$, совпадают, если не считать множителей

$$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{n!}, \frac{1}{(n+1)!}$$

с первым, вторым, ..., n -м дифференциалом функции $f(x, y)$ в точке (x, y)

$$\begin{aligned} df &= hf_x + kf_y, \\ d^2f &= (hf_x + kf_y)^{(2)} = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy}, \\ &\dots \dots \dots \\ d^nf &= (hf_x + kf_y)^{(n)} = h^nf_{x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1}kf_{x^{n-1}y} + \dots + k^nf_{y^n} \end{aligned}$$

и соответственно с $n+1$ -м дифференциалом $d^{n+1}f$ в промежуточной точке (ξ, η) прямолинейного отрезка, соединяющего точки (x, y) и $(x+h, y+k)$. Мы можем поэтому формулу Тейлора переписать в следующем более наглядном виде:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + df(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2!} d^2f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} d^nf(x, y) + R_n, \end{aligned}$$

где

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(x + \vartheta h, y + \vartheta k), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

При этом порядок исчезания R_n во всяком случае выше порядка исчезания последнего принимаемого в расчет члена d^nf , т. е. при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$

$$R_n = o[(\sqrt{h^2 + k^2})^n].$$

Формула Тейлора для функций от одной переменной привела нас при предельном переходе $n \rightarrow \infty$ к бесконечному ряду Тейлора, который дал нам возможность разложить в степенные ряды обширный класс функций от одной переменной. Для случая многих переменных подобный процесс является, вообще говоря, слишком сложным; и здесь в еще большей степени, чем для функций от одной переменной, значение формулы Тейлора заключается главным образом в том, что она дает нам возможность разложить приращение функции

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

на дифференциалы различных порядков df, d^2f, \dots

§ 7. Применения понятия вектора.

Много фактов и соотношений дифференциального и интегрального исчисления для многих переменных получают значительно более наглядную и простую форму, если воспользоваться понятиями и обозначениями векторного исчисления. Я хочу поэтому теперь в заключение настоящей главы изложить некоторые относящиеся сюда факты.

1. Поля и семейства векторов. Шаг, связывающий векторное исчисление с нашим предметом, заключается в следующем: мы уже не рассматриваем, как в первой главе, один единственный вектор или несколько отдельных векторов, но вводим многообразие векторов, зависящих от одного

или многих непрерывно изменяющихся параметров. Важнейшим случаем является тот, когда всем точкам некоторой пространственной области приводятся в соответствие связанные с ними векторы u .

Мы говорим тогда, что эти векторы u образуют векторное поле в соответствующей области. Три компоненты u_1, u_2, u_3 вектора поля являются тогда тремя функциями от координат точки приложения, которые мы теперь будем обозначать вместо

$$x, y, z \text{ через } x_1, x_2, x_3,$$

так что

$$u_1 = \phi(x_1, x_2, x_3), u_2 = \varphi(x_1, x_2, x_3), u_3 = \chi(x_1, x_2, x_3).$$

Если перейти путем поворота системы координат вокруг начала к новым прямоугольным координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3 , связанным со старыми координатами формулами преобразования вида (глава I, стр. 13):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3, \\ \xi_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3, \\ \xi_3 &= a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3,\end{aligned}$$

и вытекающими отсюда обратными формулами

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3, \\ x_2 &= b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3, \\ x_3 &= c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3,\end{aligned}$$

то вектор нашего поля будет в новых координатах опять характеризоваться тремя функциями точки

$$\omega_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \omega_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \omega_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

новыми компонентами этого вектора, причем новые компоненты связаны со старыми компонентами с помощью формул преобразования:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3, \\ \omega_2 &= a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3, \\ \omega_3 &= a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3.\end{aligned}$$

Обратно, если даны три функции точки

$$u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3),$$

то их всегда можно рассматривать как компоненты векторного поля, если только добавить при этом правило, что при повороте системы координат функции u_1, u_2, u_3 должны быть заменены тремя новыми функциями $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ согласно предыдущим формулам преобразования.

Если в некоторой области пространства задана одна единственная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ и если хотят подчеркнуть, что эта функция не рассматривается как компонента некоторого вектора, то эту функцию называют скалярной функцией или скаляром, или же, если должно быть подчеркнуто соответствие между значениями этой функции и точками заданной области, то говорят о поле скаляра. Таким скаляром является например, плотность какого-нибудь вещества.

Скорость или ускорение различных точек движущейся материи или сила, действующая в каждой точке данной области, образуют векторное поле.

В качестве примера рассмотрим поле силы тяготения материальной точки, притягивающей согласно закону Ньютона. Все векторы поля направлены по закону Ньютона к притягивающей точке, тогда как их модуль обратно пропорционален квадрату расстояния от этой точки. В качестве другого примера приведем изображенное на черт. 23 поле скоростей тела, равномерно вращающегося вокруг оси x_3 . Таким же образом мы можем представить в виде векторных полей магнитные или электрические поля сил и более сложные механические поля сил или поля скоростей потоков.

Наряду с векторными полями мы рассматриваем такие многообразия векторов, которые соответствуют не каждой точке некоторой пространственной области, но зависят только от одного параметра. Такие векторные многообразия мы называем семействами векторов и пишем:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t).$$

Подобное векторное многообразие представляет собою следовательно систему трех функций:

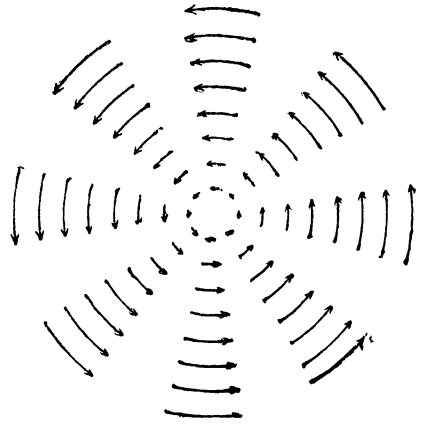
$$u_1 = \varphi(t), \quad u_2 = \phi(t), \quad u_3 = \chi(t)$$

от одной переменной t , непрерывно изменяющейся в определенном интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Мы уже рассматривали такие системы функций для частного случая $u_3 = 0$. Они давали нам параметрическое изображение кривой, лежащей в плоскости u_1, u_2 . Но и в рассматриваемом общем случае наши три функции приводят нас к кривой, но уже не плоской, а пространственной кривой. Если представить себе вектор \mathbf{u} в виде радиуса-вектора, проведенного из начала координат пространства u_1, u_2, u_3 , то когда переменная t пробегает свой интервал изменения, конец этого радиуса-вектора описывает соответствующую пространственную кривую.

Прежде чем сделать некоторые применения этих простых понятий, убедимся в том, что к подобным переменным векторам можно применять основные правила дифференциального исчисления совершенно так же, как и к скалярным величинам.

Под производной $\mathbf{u}'(t)$ вектора $\mathbf{u}(t)$ мы понимаем тот вектор, компоненты которого равны производным от компонент заданного вектора \mathbf{u} . Производный вектор ¹⁾ имеет следовательно компоненты

$$u'_1 = \varphi'(t), \quad u'_2 = \phi'(t), \quad u'_3 = \chi'(t).$$



Черт. 23. Поле скоростей при вращении.

¹⁾ Что таким путем, действительно, получается снова вектор, следует из того, что из приведенных выше формул преобразования компонент u_1, u_2, u_3 вытекают те же формулы преобразования для производных u'_1, u'_2, u'_3 .

Вместо этого мы можем также писать:

$$u' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Отсюда непосредственно видно, что основные правила дифференцирования сохраняют свою силу и для векторов. Прежде всего очевидно, что если положить

$$w = u + v,$$

то

$$w' = u' + v'.$$

Затем мы получаем для скалярного произведения

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

двух векторов u и v правило дифференцирования:

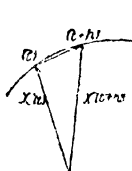
$$\frac{d(u \cdot v)}{dt} = u \cdot v' + u' \cdot v.$$

Для векторного произведения мы получаем точно таким же образом правило дифференцирования:

$$\frac{d(u \times v)}{dt} = u \times v' + u' \times v.$$

2. Применение к теории кривизны пространственных кривых. Разложим ускорения на тангенциальное и нормальное. Приведем некоторые простые приложения этих рассуждений. Обозначим через $x(t)$ зависящий от параметра t радиус-вектор пространства x_1, x_2, x_3 . Этот вектор определяет следовательно пространственную кривую, а вектор $x'(t)$ направлен по касательной к этой кривой в точке (t) ; ибо вектор $x(t+h) - x(t)$, а следовательно и отличающийся от него только скалярным множителем $\frac{1}{h}$ вектор

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$



направлен по хорде, соединяющей точку (t) кривой с точкой $(t+h)$ (черт. 24); при предельном переходе $h \rightarrow 0$ направление хорды переходит в направление касательной. Если мы вместо t возьмем, в частности, в качестве параметра длину дуги s , отсчитываемую от некоторой начальной точки, и будем обозначать дифференцирование по s точкой, то этот параметр s харак-

Черт. 24. теризуется равенством:

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = 1,$$

которое может быть также записано в виде:

$$\dot{x} \cdot \dot{x} = \dot{x}^2 = 1.$$

Это соотношение выводится для пространственных кривых точно таким же образом, как соответствующее соотношение для плоских кривых (т. I, глава 5, § 2, н° 3). Вектор \dot{x} имеет таким образом длину, равную единице.

Дифференцируя равенство $\dot{x} \cdot \dot{x} = 1$ по s , мы получаем:

$$\dot{x} \cdot \ddot{x} = 0,$$

Это равенство означает, что вектор \ddot{x} с компонентами $\ddot{x}_1(s)$, $\ddot{x}_2(s)$, $\ddot{x}_3(s)$ направлен перпендикулярно к касательной.

Мы называем этот вектор вектором кривизны или главным нормальным вектором, а его модуль, т. е. его длину кривизной

$$k = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2}$$

линии в рассматриваемой точке.

Обратную величину кривизны $\rho = \frac{1}{k}$ мы здесь также называем радиусом кривизны, а конечную точку вектора, проведенного из точки кривой по направлению вектора кривизны и равного по длине радиусу кривизны, мы называем центром кривизны.

Это определение кривизны совпадает с прежним определением, данным нами в первом томе (гл. V, § 4, н° 4). В самом деле, вектор \dot{x} имеет длину, равную единице. Если мы проведем из какой-нибудь постоянной начальной точки O векторы $\dot{x}(s)$ и $\dot{x}(s+h)$, то разность $\dot{x}(s+h) - \dot{x}(s)$ изображается так же, как и на черт. 24, хордой, соединяющей концы векторов $\dot{x}(s)$ и $\dot{x}(s+h)$. Отношение длины этой хорды к углу α , образуемому векторами $\dot{x}(s+h)$ и $\dot{x}(s)$, стремится при $h \rightarrow 0$ к единице. Поэтому:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sqrt{[\dot{x}_1(s+h) - \dot{x}_1(s)]^2 + [\dot{x}_2(s+h) - \dot{x}_2(s)]^2 + [\dot{x}_3(s+h) - \dot{x}_3(s)]^2}$$

Стоящий справа предел равен как раз полученному нами выше выражению

$$k = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2}$$

Но именно этот предел отношения $\frac{\alpha}{h}$, т. е. отношения угла между направлениями касательных к кривой в двух соседних точках, к длине заключенной между ними дуги h при $h \rightarrow 0$ мы и называли раньше кривизной.

Понятие вектора кривизны играет большую роль в механике. Представим себе, что материальная точка описывает в течение промежутка времени t кривую $x(t)$. Скорость движения задается тогда как по величине, так и по направлению вектором $\dot{x}'(t)$, а ускорение — вектором $\ddot{x}''(t)$, где штрихом обозначено дифференцирование по t . На основании правила дифференцирования функции от функции имеем:

$$\dot{x}' = \dot{x} \cdot \frac{ds}{dt}$$

(причем точкой обозначается дифференцирование по длине дуги s). Вторично дифференцируя, получаем:

$$\ddot{x} = \dot{x} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \ddot{x} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Это последнее равенство означает, согласно полученным нами результатам (относительно модулей векторов \dot{x} и \ddot{x} , следующее

Вектор ускорения равен сумме двух векторов. Один из них направлен по касательной к кривой, и его длина равна $\frac{d^2s}{dt^2}$, т. е. ускорению точки по направлению движения (тангенциальное ускорение); второй составляющий вектор направлен к центру кривизны и равняется по длине квадрату скорости, умноженному на кривизну (нормальное ускорение).

3. Градиент скаляра. Вернемся опять к рассмотрению векторных полей и остановимся кратко на некоторых часто встречающихся понятиях, связанных с понятием векторного поля.

Пусть $u = f(x_1, x_2, x_3)$ есть некоторая функция, определенная в нашей области, т. е. согласно употребляемому нами теперь способу выражения, некоторая скалярная величина. Мы можем тогда рассматривать три частных производные:

$$u_1 = f_{x_1}, \quad u_2 = f_{x_2}, \quad u_3 = f_{x_3},$$

как компоненты некоторого вектора u .

В самом деле, если совершить приведенное в п° 1 преобразование координат, то $f(x_1, x_2, x_3) = g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и согласно правилу дифференцирования сложной функции $g_{\xi_i} = a_1 f_{x_1} + b_1 f_{x_2} + c_1 f_{x_3}$ и т. д., так что три производные от функции $f(x_1, x_2, x_3)$ преобразовываются по формулам, характеризующим преобразование компонент вектора. Этот вектор, который таким образом изображает систему первых частных производных функции $u = f(x_1, x_2, x_3)$, мы называем градиентом этой функции и пишем:

$$u = \text{grad } f(x_1, x_2, x_3).$$

Градиент функции от трех переменных представляет собой в известном смысле обобщение понятия производной функции от одной переменной.

Чтобы получить наглядное представление о значении градиента, мы образуем производную от функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по направлению (a_1, a_2, a_3) , где a_1, a_2, a_3 суть три направляющих угла этого направления и следовательно удовлетворяют условию:

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 a_2 + \cos^2 a_3 = 1.$$

На стр. 65 мы получили для этой производной выражение:

$$D^a f = f_{x_1} \cos a_1 + f_{x_2} \cos a_2 + f_{x_3} \cos a_3.$$

Если обозначить через e вектор, равный по длине единице и направление которого совпадает с направлением (a_1, a_2, a_3) , так что компоненты e суть $e_1 = \cos a_1$, $e_2 = \cos a_2$, $e_3 = \cos a_3$, то мы получим для производной

от функции f по направлению (a_1, a_2, a_3) следующее векторное выражение:

$$D^a f = e \cdot \text{grad } f,$$

т. е. производная по направлению (a_1, a_2, a_3) равняется скалярному произведению единичного вектора, проведенного в этом направлении на градиент функции, или, другими словами, проекции градиента на направление дифференцирования (гл. I, стр. 12).

Этот факт придает понятию градиента очень большое значение. Если например спускаться в каком направлении значение функции нарастает или убывает с наибольшей быстротой, то мы должны найти то направление, для которого написанное выше выражение имеет максимальное положительное или отрицательное значение. Это имеет место очевидно тогда, когда вектор e имеет с градиентом одинаковое или прямо противоположное направление. Таким образом направление градиента есть направление быстрейшего нарастания или убывания значения функции, а модуль градиента есть скорость или крутизна подъема или падения функции по этому направлению.

К геометрическому значению и наглядному истолкованию понятия градиента мы еще вернемся в следующей главе. Но уже здесь мы можем дать следующий наглядный способ определения направления градиента. Ограничимся сначала векторами пространства двух измерений, т. е. рассмотрим градиент функции $f(x, y)$. Представим себе, что эта функция изображена с помощью ее линий уровня $f(x, y) = c$ на плоскости x, y . Тогда производная от этой функции по направлению этих линий уровня обращается очевидно в нуль (стр. 64), ибо для двух точек P и Q , лежащих на одной и той же линии уровня, имеет место равенство $f(P) - f(Q) = 0$ (смысл обозначений $f(P)$ и $f(Q)$ ясен сам по себе), и это равенство остается в силе, если мы его разделим на расстояние h между точками P и Q и совершим предельный переход $h \rightarrow 0$. Так как отсюда следует, что проекция градиента на направление касательной к линии уровня равна нулю, то градиент в каждой точке направлен перпендикулярно к соответствующей линии уровня. Совершенно аналогичный результат мы получим и для градиентов в пространстве трех измерений. Если изобразить функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ с помощью поверхностей уровня $f(x_1, x_2, x_3) = c$, то компонента градиента по какому-нибудь направлению, касательному к поверхности уровня, равна нулю, и следовательно градиент направлен перпендикулярно к поверхности уровня.

Такие поля векторов, являющихся градиентами скалярной величины, встречаются в очень многих приложениях математики. Так например поле такого рода является поле силы тяготения. В самом деле, компоненты Ньютоновой силы тяготения задаются выражениями:

$$\begin{aligned} & C \frac{\xi_1 - x_1}{[V(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ & C \frac{\xi_2 - x_2}{[V(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ & C \frac{\xi_3 - x_3}{[V(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

где ξ_1, ξ_2 и ξ_3 означают координаты притягивающей точки, x_1, x_2 и x_3 — координаты притягиваемой точки, а C — некоторую постоянную; причем $C = = mM\kappa$, где m — масса одной точки, M — масса другой точки, а κ — постоянная тяготения. (Множители

$$\frac{\xi_1 - x_1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}$$

и т. д. суть косинусы углов, образуемых прямой, соединяющей обе точки, с осями координат.)

Эти компоненты, как в этом можно непосредственно убедиться дифференцированием, являются частными производными от функции по координатам x_1, x_2, x_3 . Наш вектор силы равняется поэтому, с точностью до фактора пропорциональности, градиенту функции:

$$C \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}$$

натом x_1, x_2, x_3 . Наш вектор силы равняется поэтому, с точностью до фактора пропорциональности, градиенту функции:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}.$$

Если поле сил может быть представлено в виде градиента некоторой скалярной функции, то эту скалярную функцию обычно называют потенциалом или силовой функцией поля сил. Мы позже встретимся с этим понятием в связи с вопросами более общего характера при рассмотрении работы и энергии (гл. V, § 1 и гл. VI, § 1).

4. Ротор и дивергенция векторного поля. Наряду с градиентом скаляра большую роль играет понятие ротора (по-английски *curl*) или вихря векторного поля. Ротор также является вектором, и компоненты v_1, v_2, v_3 этого вектора

$$v = \text{rot } u$$

определяются ¹⁾ формулами:

$$v_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}; \quad v_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \quad v_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Мы здесь ограничиваемся только этим определением понятия ротора, и лишь позже в главе V мы сможем разъяснить его наглядно-геометрическое значение на ряде примеров и применений.

То же относится и к понятию дивергенции векторного поля; дивергенция представляет собою число или скаляр, определяемый с помощью формулы:

$$\text{div } u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

¹⁾ В том, что эти три функции действительно удовлетворяют тем формулам преобразования, которые, как мы выше установили (стр. 78) являются характеристическими признаками компонент вектора, можно убедиться путем несложного вычисления; однако позже, в главе V, § 6, когда мы воспользуемся этим понятием ротора, мы сможем непосредственно убедиться в векторном характере этого понятия.

т. е. дивергенция вектора равна сумме трех производных от компонент вектора по соответствующим координатам¹⁾.

Эти три понятия градиента, ротора и дивергенции, могут быть объединены с помощью символического вектора с компонентами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$, который часто называют наблой и обозначают символом ∇ . Градиент $\text{grad } f$ скалярного поля $f(x_1, x_2, x_3)$ равняется произведению ∇f скалярной величины f на символический вектор ∇ , т. е. представляет собою вектор с компонентами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Ротор $\text{rot } u$ векторного поля $u(x_1, x_2, x_3)$ равняется векторному произведению вектора u на символический вектор ∇ , т. е.

$$\text{rot } u = \nabla \times u,$$

и наконец дивергенция равняется скалярному произведению:

$$\text{div } u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

В заключение приведем некоторые часто встречающиеся соотношения: Ротор градиента равен нулю:

$$\text{rot grad } f = 0.$$

В самом деле, это соотношение, как легко убедиться, вытекает из переместительности порядка дифференцирования.

Дивергенция ротора равна нулю:

$$\text{div rot } u = 0,$$

что также следует из переместительности порядка дифференцирования.

Дивергенция градиента представляет собою чрезвычайно важное аналитическое выражение, очень часто встречающееся в анализе это — так называемое выражение Лапласа, играющее большую роль в теории потенциала и равное сумме трех „главных“ частных производных второго порядка:

$$\text{div grad } u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2},$$

где Δu служит сокращенным обозначением стоящего справа выражения.

Наконец заметим еще, что терминология векторного анализа часто употребляется и для функции нескольких независимых переменных большего трех, и в соответствии с этим систему n функций от n независимых переменных рассматривают иногда как векторное поле в n -мерном пространстве. Понятие ска-

¹⁾ В главе V, § 5 мы докажем без всяких вычислений, что дивергенция вектора не зависит от системы координат.

лярного произведения, а также понятие градиента сохраняют при этом свой прежний смысл, тогда как остальные понятия и соотношения становятся значительно более сложными по сравнению с трехмерным пространством.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ ВТОРОЙ.

§ 1. Принцип предельных точек для случая многих измерений и его применения.

Для того чтобы придать употребляемым нами понятиям и их обоснованию ту степень точности, которая нужна для полного их освобождения от всяких ссылок на интуицию, мы должны для случая многих переменных поступить точно так же, как и для одной переменной. Мы ограничимся рассмотрением этих вопросов для случая двух независимых переменных, так как в случае большего числа независимых переменных имеют место совершенно аналогичные факты.

1. **Формулировка принципа предельных точек.** Мы кладем в основу опять принцип предельных точек Больцано-Вейерштрасса. Назовем точкой или местом P двумерной области систему двух чисел (x, y) , которую мы можем геометрически представить обычным способом с помощью точки с прямоугольными координатами x, y в плоскости x, y . Представим себе бесконечное множество таких точек $P(x, y)$, и предположим, что все эти точки лежат в некоторой ограниченной замкнутой области, так что для всех точек заданного множества $|x| \leq C, |y| \leq C$, где C — некоторое постоянное число. Принцип предельных точек гласит: всякое бесконечное множество точек, лежащих в ограниченной замкнутой области, имеет в этой области по крайней мере одну предельную точку; т. е. в этой области имеется по меньшей мере одна точка Q с координатами ξ и η , в любой сколь угодно малой окрестности которой содержится бесконечно много точек заданного множества. Другими словами, для любого сколь угодно малого положительного числа δ существует бесконечно много точек $P(x, y)$, принадлежащих заданному множеству и содержащихся в области

$$|x - \xi| \leq \delta, |y - \eta| \leq \delta.$$

Или в другой формулировке: из всякого бесконечного множества можно выделить последовательность точек P_1, P_2, P_3, \dots , сходящихся к пределу Q .

Этот принцип предельных точек для случая многих измерений столь же очевиден, как и для одной переменной. Аналитически его можно доказать точно так же, как и для одной независимой переменной, заменяя только в нашем прежнем доказательстве (т. I, стр. 48) интервалы прямоугольными областями. Мы здесь однако приведем другой несколько менее общий принцип доказательства, имея в виду другие применения этого принципа.

Если задана бесконечная последовательность замкнутых ограниченных областей G_1, G_2, G_3, \dots , из которых каждая последующая область целиком содержится в предыдущей области, и если область G_n может быть

заключена в квадрат, сторона которого стремится к нулю с возрастанием n , то эта последовательность областей определяет одну и только одну точку Q , принадлежащую одновременно всем областям G_n . Доказательство почти очевидно; ибо если взять в каждой из областей какую-нибудь точку P_n , то как координаты x , так и координаты y этих точек должны стремиться к пределам ξ и соответственно η , как в этом непосредственно можно убедиться (хотя бы на основании условия сходимости для одной переменной). Координаты ξ и η определяют тогда искомую точку Q . Сформулированный нами принцип мы назовем „принципом последовательных подразделений“.

Принцип предельных точек является непосредственным следствием принципа последовательных подразделений. В самом деле, пусть задано бесконечное множество точек, лежащее в области G . Разобьем квадрат $|x| \leq C$, $|y| \leq C$, внутри которого содержится наше множество, на четыре конгруэнтных квадрата со сторонами, равными C . Если к каждому из этих квадратов причислить его границу, то по меньшей мере в одном из этих квадратов, например Q_1 , должны содержаться бесконечно много точек заданного точечного множества. Этот квадрат мы снова делим на четыре конгруэнтных квадрата со сторонами, равными $\frac{C}{2}$; по меньшей мере в одном из этих че-

тырех квадратов, например Q_2 , должны снова содержаться бесконечно много точек данного множества. Мы применяем к квадрату Q_2 тот же процесс и получаем квадрат со стороной $\frac{C}{4}$, содержащий бесконечно много точек

заданного множества и т. д. Согласно принципу последовательных подразделений последовательность квадратов Q_1, Q_2, Q_3, \dots определяет однозначно точку Q , которая и является предельной точкой данного множества в смысле нашей теоремы. Ибо достаточно взять в каждом квадрате Q_n какую-нибудь точку P_n из нашего множества; тогда эти точки P_n сходятся очевидно к точке Q при возрастании n .

Из принципа предельных точек для многих независимых переменных вытекают совершенно такие же следствия, как и для одной переменной. Так как доказательства протекают совершенно аналогично, то достаточно только сформулировать отдельные положения.

В первую очередь я привожу признак сходимости Коши, который мы можем формулировать следующим образом:

Последовательность точек P_1, P_2, P_3, \dots с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ сходится к предельной точке тогда и только тогда, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно определить такой индекс $N = N(\varepsilon)$, что расстояние

$$\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

между n -й и m -й точкой становится меньше ε , как только оба индекса n и m превосходят индекс N .

Совершенно так же, как и для одной независимой переменной доказываются дальше следующие теоремы.

Непрерывная в замкнутой области функция принимает в этой области наибольшее и наименьшее значение.

Всякая непрерывная в замкнутой области функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в этой области, т. е. для этой области G и для любого положительного числа ε существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее исключительно от ε , но не зависящее от точки (x_0, y_0) , такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

если только расстояние между точками (x, y) и (x_0, y_0) , лежащими в области G , меньше δ .

2. Некоторые понятия из теории точечных множеств. Общее понятие предельной точки лежит в основе многих более тонких исследований из теории множеств, имеющих целью логическое обоснование анализа. Хотя для тех целей, которые мы преследуем в настоящем курсе, мы могли бы вполне обойтись без этих рассуждений, я все же приведу здесь полноты ради некоторые основные понятия.

Ограниченное множество, состоящее из бесконечно-большого числа точек, называется замкнутым, если оно содержит в себе все свои предельные точки. Так например все точки замкнутой кривой или поверхности образуют замкнутое множество точек. Непрерывная на замкнутом множестве функция всегда принимает в некоторой точке множества наибольшее значение, а в некоторой другой точке наименьшее значение, что доказывается дословно таким же образом, как и соответствующая теорема для частного случая замкнутых областей. Так например непрерывная на замкнутом круге функция принимает в некоторой точке этого круга наибольшее значение.

Верхняя грань расстояния между двумя точками заданного множества называется диаметром этого точечного множества; если множество замкнуто, то эта верхняя грань действительно достигается для некоторой пары точек множества, что следует из того, что расстояние между двумя точками зависит от этих точек непрерывным образом, и эта непрерывная функция должна, согласно предыдущей теореме, достигнуть своего наибольшего значения.

На этом же основании имеет место следующий факт.

Если точка P не принадлежит замкнутому точечному множеству M , то существует положительное кратчайшее расстояние точки P от множества M , т. е. в множестве M содержится точка Q , расстояние которой от P меньше или, в крайнем случае, равно расстоянию всякой другой точки множества M от точки P .

Множество называется связным, если для любого сколь угодно малого ε можно между любыми двумя точками A и B этого множества вставить такую цепь промежуточных точек $P_1 = A, P_2, \dots, P_n = B$, принадлежащих множеству, чтобы расстояние между двумя последовательными точками P_i и P_{i+1} было меньше ε .

Множество называется открытым, если для каждой точки P множества существует некоторая окрестность этой точки, всецело содержащаяся в данном множестве.

Всякое открытое и связное множество называется открытой областью

Так например множество всех точек, лежащих внутри любой замкнутой кривой или например множество, получающееся из множества всех внутренних точек круга выкидыванием точек, лежащих на каком-нибудь радиусе, представляют собой открытые области. Предельные точки открытой области, не принадлежащие самой области, называются краевыми точками этой области. Если присоединить к открытой области все ее краевые точки, то полученное множество называется замкнутой областью; для наших целей мы здесь преимущественно пользуемся такими замкнутыми областями.

3. Теорема о покрытии. В качестве дальнейшего следствия из принципа предельных точек я приведу здесь еще один факт, особая формулировка которого полезна для некоторых доказательств и более тонких исследований.

Если каждой точке ограниченной замкнутой области G приведена в соответствие некоторая окрестность этой точки, например круг или квадрат, то из этого множества окрестностей всегда можно выбрать конечное число их так, чтобы это конечное число замкнутых областей целиком покрывало всю область G .

Доказательство следует почти непосредственно из принципа последовательных подразделений путем рассуждения от противного. Допустим, что теорема неверна и разобьем, как и в предыдущем доказательстве, рассматриваемую часть плоскости на четыре квадрата. Этим самым область G разбивается также не больше чем на четыре части. Если невозможно покрыть всю область G с помощью конечного числа заданных окрестностей, то по меньшей мере одна из этих частей области G , например G_1 , также не может быть покрыта конечным числом наших окрестностей. Разбивая затем плоскость на еще более мелкие квадраты путем перехода к квадратам со стороной $\frac{C}{2}$, мы разложим G_1 снова на несколько частичных областей, из

которых во всяком случае одна, например G_2 , опять не может быть покрыта конечным числом данных окрестностей. Продолжение этого процесса дает нам последовательность областей G_1, G_2, G_3, \dots такую, что каждая последующая область содержится в предыдущей и заключена в квадрат, сторона которого стремится к нулю, причем все эти области обладают тем свойством, что их невозможно покрыть конечным числом данных окрестностей. Но так как эти области определяют предельную точку Q , и эта предельная точка содержится в нашей замкнутой области G , то мы приходим к противоречию: с одной стороны, точке Q , по условию, соответствует одна из наших окрестностей, содержащая Q , и следовательно существует достаточно малый квадрат, окружающий Q и содержащийся в этой окрестности, так что все области G_n , начиная с некоторого n , попадают внутрь этой окрестности. С другой же стороны, мы только что пришли к заключению, что ни одна из областей G_n не может быть покрыта конечным числом данных окрестностей. Таким образом допущение несправедливости нашей теоремы привело нас к противоречию, и теорема о покрытии этим доказана.

§ 2. Более подробное исследование понятия предела в случае многих переменных.

Полезно сопоставить между собой и точнее охарактеризовать с точки зрения некоторых общих принципов различные способы перехода к пределу для случая многих переменных. При этом мы снова ограничимся случаем двух переменных.

1. **Двойные последовательности и их пределы.** Подобно тому как для одной независимой переменной мы исходили из рассмотрения последовательностей чисел a_n , где индекс n пробегал весь ряд целых чисел, так для многих переменных имеют большое значение так называемые двойные последовательности, т. е. множества чисел

$$a_{nm},$$

имеющих два индекса n и m , где n и m пробегают независимо друг от друга последовательность целых чисел, так что мы получаем например числа:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, \dots$$

В качестве примера приведем числовые множества:

$$a_{nm} = \frac{1}{n+m}, \quad a_{nm} = \frac{n}{n^2+m^2}, \quad a_{nm} = \frac{n}{n+m}.$$

Мы говорим, что наша двойная последовательность a_{nm} стремится при $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ к пределу g , если абсолютное значение разности $|a_{nm} - g|$ становится меньше любого сколь угодно малого наперед заданного числа ε , если только выбрать оба индекса n и m достаточно большими, например сделав n и m больше некоторого числа N , зависящего только от ε .

Мы пишем тогда: $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm} = g$.

Так например

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{1}{n+m} = 0,$$

или

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{m+n^2}{mn^2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m} \right) = 0.$$

На основании условия Коши мы можем впрочем судить о сходимости, не вводя в рассмотрение самого предела g ; для двойных последовательностей условие сходимости Коши гласит так: Последовательность чисел a_{nm} сходится тогда и только тогда, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|a_{nm} - a_{n'm'}| < \varepsilon$, если только числа n, m , а также n', m' превосходят N , причем в остальном n, m, n' и m' могут быть какими угодно.

Многочисленные вопросы анализа для случая многих переменных сводятся к тому, чтобы разложить подобный двойной переход к пределу на два последовательных простых предельных перехода. Другими словами: вместо того, чтобы заставлять n и m одновременно неограниченно расти, пытаются сначала, оставляя неизменным один из индексов, например m , совершить предельный переход $n \rightarrow \infty$; полученный таким путем предел, если он существует, будет тогда, вообще говоря, зависеть от m . Обозначая этот предел через g_m , мы теперь заставим m неограниченно расти и совершим предельный переход $m \rightarrow \infty$.

Возникает вопрос, при каких условиях этот предел последовательности чисел g_m совпадает с первоначальным двойным пределом и, дальше, является ли при разложении двойного предела на два последовательных простых предельных перехода безразличным, в каком порядке мы производим эти два перехода к пределу; т. е. получим ли мы прежний результат, если мы наоборот сначала образуем $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} = \gamma_n$ и затем перейдем к пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$.

Чтобы ориентироваться в этих вопросах, мы рассмотрим сначала несколько примеров.

Для двойной последовательности $a_{nm} = \frac{1}{n+m}$ мы получаем при постоянном m $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = g_m = 0$, так что и $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = 0$, и тот же результат мы получим, если произведем эти два предельных перехода в обратном порядке.

Для последовательности же:

$$a_{nm} = \frac{n}{n+m} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n}}$$

мы получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = g_m = 1,$$

так что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = 1,$$

тогда как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} = \gamma_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0.$$

Таким образом в этом случае результат двух последовательных предельных переходов не является независимым от порядка этих операций и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}).$$

Впрочем, здесь не существует двойного предела при одновременном переходе $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ ¹⁾.

¹⁾ В самом деле, если бы подобный двойной предел существовал, то он должен был бы равняться нулю, так как мы можем выбрать такие сколь угодно большие значения n и m , например полагая $m = n^2$ и неограниченно увеличивая n , чтобы наши числа a_{nm} стали сколь угодно малыми. С другой стороны, если положить $n = m$,

Другой пример дает последовательность чисел:

$$a_{nm} = \frac{\sin n}{m}.$$

Здесь двойной предел безусловно существует и равен нулю, так как числитель дроби по абсолютному значению никогда не превосходит единицы, тогда как знаменатель неограниченно возрастает. Тот же предел мы получаем, если мы сначала заставляем неограниченно расти m , что дает: $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} = \gamma_n = 0$, откуда и $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Но если бы мы захотели совершить эти предельные переходы в обратном порядке, оставляя сначала неизменным m и неограниченно увеличивая n , то мы натолкнулись бы на затруднение, ибо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ вовсе не существует. Таким образом в данном случае из двух способов разложения двойного предела на два простых предельных перехода возможен только один.

Существующее здесь положение вещей характеризуется следующими двумя теоремами. Первая теорема гласит: Если существуют двойной предел $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm} = g$ и простой предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = g_m$, то существует также и предел $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m$ и при этом $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = g$. Если кроме того существует также $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} = \gamma_n$, то и γ_n при $n \rightarrow \infty$ имеет тот же предел g , так что, записывая это одной формулой, получаем:

$$g = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}),$$

и разложение двойного предела на простые предельные переходы возможно и не зависит от их порядка.

Доказательство почти непосредственно следует из определения этих пределов. В силу существования предела $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm} = g$ имеет место неравенство:

$|a_{nm} - g| < \epsilon$ для любого сколь угодно малого наперед заданного $\epsilon > 0$, если только n и m оба превосходят некоторое достаточно большое число $N = N(\epsilon)$, зависящее от ϵ .

то наши числа принимают значение, равное $\frac{1}{2}$, как бы велико ни было при этом n , и мы приходим таким образом к противоречию с нашим предположением о существовании двойного предела. Но даже и в том случае, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm})$$

двойной предел $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm}$ может не существовать, как это можно видеть на примере:

$$a_{nm} = \frac{1}{(n-m) + \frac{1}{2}}.$$

Оставляя неизменным m и неограниченно увеличивая n , мы получаем $|\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} - g| \leq \varepsilon$ или $|g_m - g| \leq \varepsilon$, и так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, если только m достаточно велико, то это неравенство равносильно соотношению: $\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}) = g$.

Вторая часть теоремы доказывается совершенно аналогичным образом.

Вторая теорема устанавливает в известном смысле обратное соотношение. Она основывается на следующем понятии равномерной сходимости. Мы говорим, что последовательность чисел a_{nm} при $n \rightarrow \infty$ стремится равномерно относительно m к пределу g_m , если не только существует для всякого m предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = g_m,$$

но если кроме того для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое исключительно зависящее от ε , но не зависящее от m число $N = N(\varepsilon)$, что

$$|g_m - a_{nm}| < \varepsilon,$$

если только $n > N$. Так например последовательность чисел:

$$a_{nm} = \frac{n}{m(n+m)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+m}$$

стремится равномерно к пределу $g_m = \frac{1}{m}$, как это непосредственно следует из оценки:

$$\left| a_{nm} - \frac{1}{m} \right| = \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}.$$

Мы должны здесь только выбрать $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Но такая равномерная сходимость уже не имеет места например для последовательности $a_{nm} = \frac{m}{n+m}$.

Хотя предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = g_m = 0$ здесь и существует для какого-нибудь постоянного m , однако сходимость уже не равномерна. В самом деле, зададим какое-нибудь число ε , например $\varepsilon = \frac{1}{100}$; тогда, как бы велико ни было n , всегда найдутся такие значения m , для которых $|a_{nm} - g_m| = a_{nm} > \varepsilon$.

Для этого достаточно выбрать m равным $2n$, тогда $a_{nm} = \frac{2}{3}$ отличается от своего предела нуль больше чем на $\frac{1}{100}$.

Наша вторая теорема гласит так: если числа a_{nm} при постоянном m стремятся к пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = g_m$ равномерно относительно m и если, далее,

существует $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = g$, то этот предел, полученный двумя последовательными предельными переходами, мы можем рассматривать как двойной предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm}$$

и поэтому мы можем изменить порядок переходов к пределу, если только существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} = g_n$.

Доказательство проводится совершенно аналогично предыдущему, если принять во внимание неравенство $|a_{nm} - g| \leq |a_{nm} - g_m| + |g_m - g|$, и может быть предоставлено читателю.

2. Двойной предельный переход для случая непрерывных переменных. Во многих случаях приходится рассматривать такие предельные переходы для многих переменных, при которых, с одной стороны, имеет место неограниченное возрастание известных индексов, например n , а, с другой стороны, непрерывное приближение одной или нескольких непрерывных переменных x, y, \dots и т. д. к пределам ξ, η, \dots и т. д.; или же — такие предельные переходы, при которых вместо индексов аргументами являются исключительно непрерывные переменные, стремящиеся к известным пределам. Принципиально при этом ничто не меняется по сравнению с нашими предыдущими рассмотрениями.

Заметим сначала, что эта точка зрения охватывает в качестве частного случая подробно рассмотренное нами уже раньше понятие предела последовательности функций $f_n(x)$ или $f_n(x, y)$ при возрастании n . Величина $f_n(x)$ или $f_n(x, y)$ зависит кроме аргумента x или (x, y) , непрерывно изменяющихся в некоторой области, еще от целочисленного аргумента — индекса n . Мы видели раньше, что в случае равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x)$ предельная функция $f(x)$ непрерывных функций $f_n(x)$ также непрерывна. Эта непрерывность приводит нас к равенствам:

$$f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow \xi} f_n(x)],$$

которые выражают переместительность порядка предельных переходов

$$n \rightarrow \infty \text{ и } x \rightarrow \xi.$$

Эта же теорема имеет место и для случая многих независимых переменных, так как в этом случае ничто не меняется ни в определениях, ни в доказательствах. С другими примерами, показывающими, какое большое значение имеет в анализе вопрос о переместительности порядка переходов к пределу, мы уже встречались раньше, например, при перемене порядка дифференцирования и в других случаях, и встретимся еще в дальнейшем. Приведу еще пример функции:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

При постоянном $y \neq 0$ мы получаем при $x \rightarrow 0$ предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

а при постоянном $x \neq 0$ и $y \rightarrow 0$ мы получаем:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1.$$

Таким образом в этом случае

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] \neq \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)],$$

и результат зависит от порядка предельных переходов, что связано с непрерывностью нашей функции в начале координат. Заметим впрочем, что в отношении разложения двойных пределов на последовательные простые предельные переходы и переместительности порядка этих предельных переходов для случая непрерывных переменных имеют место точно такие же теоремы, какие нами были только что доказаны в п^о 1 для двойных последовательностей.

3. Теорема Дини о равномерной сходимости монотонных последовательностей функций. Для многих более тонких рассмотрений анализа очень важной является одна общая теорема о равномерной сходимости, которую я здесь попутно докажу. Мы уже видели раньше, (т. I, стр. 337 и след.), что последовательность непрерывных функций может сходиться к непрерывной предельной функции и без того, чтобы сходимость была равномерной. Однако в одном частном случае из непрерывности предельной функции вытекает равномерность сходимости. Это имеет место в том случае, когда последовательность функций является монотонной, т. е. когда с возрастанием n значение функции либо никогда не увеличивается, либо никогда не уменьшается. Не ограничивая общности, мы можем предположить монотонное возрастание функций и формулировать нашу теорему следующим образом.

Если в замкнутой области G последовательность непрерывных функций $f_n(x, y)$ сходится к непрерывной предельной функции $f(x, y)$ и если повсюду

$$f_{n+1}(x, y) \geq f_n(x, y),$$

то сходимость равномерна в области G .

Мы ведем доказательство этой теоремы, представляющее собой типичное применение принципа предельных точек, путем рассуждения от противного. Если бы сходимость была неравномерной, то существовало бы такое положительное число α , что для любого сколь угодно большого n можно было бы найти точку P_n области G , в которой значение функции $f_n(P_n)$ отличалось бы от предельного значения $f(P_n)$ более чем на α . Когда n пробегает последовательность всех целых чисел, точки P_n пробегают некоторую последовательность точек, и эта последовательность имеет, согласно принципу предельных точек, по меньшей мере одну предельную точку Q , которая также принадлежит замкнутой области G .

Но для всякой точки P области G и всякого целого положительного числа μ

$$f(P) = f_\mu(P) + R_\mu(P),$$

где $f_\mu(P)$ и „остаток“ $R_\mu(P)$ являются непрерывными функциями точки P . В силу предположенной монотонности последовательности функций $f_n(P)$ мы имеем далее:

$$R_\mu(P) \geq R_n(P)$$

при $n > \mu$. В частности, мы имеем в точке P_n при $n > \mu$

$$R_\mu(P_n) \geq R_n(P_n) \geq \alpha.$$

Рассмотрим теперь подпоследовательность точек P_n , сходящихся к предельной точке Q . В силу непрерывности функции R_μ мы получаем отсюда, считая μ постоянным, что $R_\mu(Q) \geq \alpha$. Так как однако при этом переходе к предельной точке Q число n неограниченно растет, то мы можем и индекс μ выбрать сколь угодно большим; ибо как бы велико ни было μ , мы будем иметь еще бесчисленное множество значений $n > \mu$, для которых справедливо вышенаписанное неравенство. Поэтому неравенство $R_\mu(Q) \geq \alpha$ противоречит тому факту, что $R_\mu(Q)$ стремится при возрастании μ к нулю. Итак предположение неравномерной сходимости приводит к противоречию, и наша теорема доказана.

§ 3. Однородные функции.

В заключение коснемся еще одного специального вопроса, а именно теории однородных функций. Простейшими однородными функциями, встречающимися в анализе и его приложениях, являются однородные целые рациональные функции от многих переменных. Мы называем функцию вида $ax + by$ однородной функцией первой степени относительно x и y , функцию вида $ax^2 + bxy + cy^2$ — однородной функцией второй степени относительно x и y , и вообще мы называем целую рациональную функцию от x и y или от большего числа переменных однородной функцией степени h , если сумма показателей независимых переменных имеет во всех членах значение h , так что члены этой функции с точностью до коэффициентов имеют вид:

$$x^h, x^{h-1}y, x^{h-2}y^2, \dots, y^h.$$

Такая однородная функция обладает тем свойством, что для любого значения t имеет место равенство:

$$f(tx, ty) = t^h f(x, y).$$

Обобщая это свойство однородных целых рациональных функций, мы вообще назовем однородной функцией степени h функцию, удовлетворяющую равенству:

$$f(tx, ty, \dots) = t^h f(x, y, \dots).$$

Приведем несколько примеров таких общих однородных функций, не являющихся целыми рациональными функциями:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + 3xy^2 + z^3}{xy + y^2 + xz}, (h=1), \\ & \frac{xy + 2y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (h=1), \\ & \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right), (h=0), \\ & x^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) + y\sqrt{x^2 + y^2} \log \frac{x+y}{x}, (h=2). \end{aligned}$$

Для однородных функций в случае их дифференцируемости имеет место следующее характеризующее их соотношение Эйлера:

$$xf_x + yf_y + zf_z + \dots = hf(x, y, z, \dots).$$

Для доказательства мы дифференцируем равенство

$$f(tx, ty, tz, \dots) = t^h f(x, y, z, \dots),$$

справедливое для любых значений t , по t , и мы получаем, применяя к левой части правило дифференцирования сложной функции, соотношение:

$$xf_x(tx, ty, \dots) + yf_y(tx, ty, \dots) + \dots = ht^{h-1}f(x, y, z, \dots).$$

Полагая затем здесь $t=1$, мы сразу получаем стоящую выше формулу Эйлера. Обратно, легко доказать, что соотношение Эйлера является не только следствием однородности, но что и, наоборот, из этого соотношения следует однородный характер данной функции $f(x, y, z, \dots)$, так что соотношение Эйлера является необходимым и достаточным условием однородности функции. В самом деле, тот факт, что функция является однородной функцией степени h , можно выразить также следующим образом: если разделить функцию на x^h , то полученное частное зависит только от отношений $y:x$, $z:x$ и т. д. Поэтому для того чтобы вывести из соотношения Эйлера однородность функции, достаточно показать, что при введении новых переменных $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$, $\zeta = \frac{z}{x}$, ... функция

$$\frac{1}{x^h} f(x, y, z, \dots) = \frac{1}{\xi^h} f(\xi, \eta\xi, \zeta\xi, \dots) = g(\xi, \eta, \zeta, \dots),$$

в действительности не зависит от переменной ξ , т. е. что имеет место равенство $g_\xi = 0$. Чтобы это доказать, мы образуем согласно правилу дифференцирования сложной функции производную

$$g_\xi = (f_x + \eta f_y + \dots) \frac{1}{\xi^h} - \frac{h}{\xi^{h+1}} f = (xf_x + yf_y + \dots) \frac{1}{x^{h+1}} - \frac{h}{x^{h+1}} f;$$

но стоящее справа выражение обращается в нуль в силу соотношения Эйлера, что и доказывает наше утверждение.

Несколько более изящным, хотя и менее прямым путем можно доказать нашу теорему также и следующим образом. Покажем, что из соотношения Эйлера следует, что функция $g(t) = t^h f(x, y, \dots) - f(tx, ty, \dots)$ равна нулю при всех значениях t . В самом деле, во-первых, $g(1) = 0$. Далее:

$$g'(t) = h t^{h-1} f(x, y, \dots) - x f_x(tx, ty, \dots) - y f_y(tx, ty, \dots) - \dots$$

Но так как в силу соотношения Эйлера, примененного для аргументов tx, ty, \dots , мы имеем:

$$x f_x(tx, ty, \dots) + y f_y(tx, ty, \dots) + \dots = \frac{h}{t} f(tx, ty, \dots),$$

то функция $g(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$g'(t) = g(t) \frac{h}{t}.$$

Полагая $g(t) = \gamma(t) t^h$, мы получаем:

$$g'(t) = \frac{h}{t} g(t) + t^h \gamma'(t),$$

откуда для $\gamma(t)$ получается дифференциальное уравнение:

$$t^h \gamma'(t) = 0.$$

Единственным решением этого дифференциального уравнения является:

$$\gamma = \text{const} = c.$$

Но при $t=1$ функция $\gamma(t)$ также равна нулю, поэтому $c=0$ и следовательно $g(t)=0$ для всех значений t , что и требовалось доказать.

ГЛАВА III.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ.

§ 1. Неявные функции.

1. Общие замечания. В предыдущей главе мы еще не вполне овладели задачей дифференцирования, а именно мы не распространили понятие об обратной функции на случай многих переменных и не владеем техникой дифференцирования такой функции. Функция обратная функции $y=f(x)$ получается путем решения уравнения $y-f(x)=0$ относительно x . В этом параграфе мы обобщим эту задачу, а именно попытаемся решить уравнение более общего вида $F(x, y)=0$ относительно y или относительно x и рассмотрим соответствующие задачи для функций от многих переменных. Затем в § 3 рассмотрим также системы уравнений.

В элементарной аналитической геометрии часто встречаются кривые, которые выражаются не уравнениями вида $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$, а общим уравнением между x и y вида $F(x, y)=0$, например окружность $x^2+y^2-1=0$ или эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ или лемниската

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

Чтобы получить y как функцию от x или x как функцию от y , необходимо решить это уравнение относительно y или относительно x . Говорят, что полученные таким образом функции $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$ заданы в неявном виде уравнением $F(x, y)=0$ и лишь решение этого уравнения дает функции $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$ в явном виде. В указанных примерах и вообще часто в применениях явное решение легко получить с помощью известных элементарных функций. В других случаях можно достигнуть цели применением бесконечных рядов или других бесконечных процессов, т. е. можно вычислить функцию $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$ приближенно с произвольной точностью.

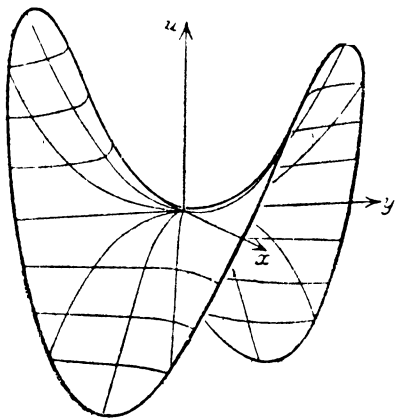
Во многих случаях однако гораздо удобнее не давать функцию в явном виде путем точного или приближенного решения уравнения $F(x, y)=0$, а рассматривать функцию в неявном виде, при котором ни одной из переменных x и y не отдается предпочтения.

Однако ошибочно было бы думать, что для каждой функции $F(x, y)$ уравнение $F(x, y)=0$ определяет неявную функцию $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$. Легко указать примеры функций $F(x, y)$, которые, будучи приравнены нулю, не имеют решений. Например уравнению $x^2+y^2=0$ удовлетворяет только единственная пара значений $x=0, y=0$, уравнению $x^2+y^2+1=0$

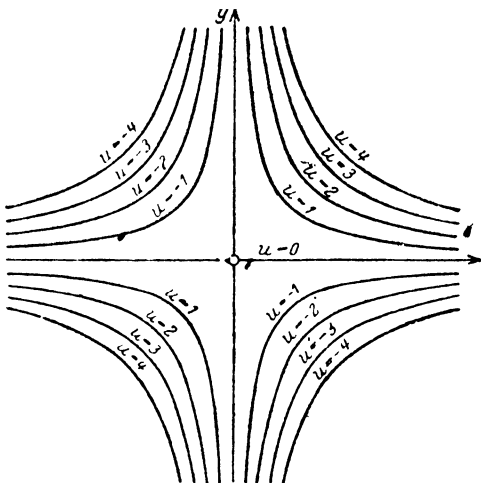
не удовлетворяет ни одна (действительная) пара значений (x, y) . Необходимо поэтому более подробно исследовать, когда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = f(x)$ и какими свойствами обладает определенная таким образом функция.

2. Геометрическая интерпретация. Чтобы выяснить этот вопрос, вообразим себе, что функция $u = F(x, y)$ представлена графически поверхностью в трехмерном пространстве. Пересечем эту поверхность с плоскостью x, y ; возникает вопрос, существует ли линия пересечения, которую можно было бы представить в виде $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. (Как далеко простирается линия пересечения, это — другой вопрос, которого мы здесь совершенно не затрагиваем.)

Геометрическая интуиция нам тотчас же указывает, когда мы можем ожидать, что такая линия пересечения существует, и когда мы на это



Черт. 25. $u = xy$.



Черт. 26. Линия уровня функции $u = xy$.

рассчитывать не можем. Если наша кривая должна проходить через точку (x_0, y_0) , то точка поверхности $u = F(x, y)$ в этом месте должна непременно лежать в плоскости x, y , т. е. должно удовлетвориться равенство $F(x_0, y_0) = 0$. Если наша плоскость $u = 0$ касается поверхности в точке (x_0, y_0) и в окрестности этой точки не имеет с поверхностью никаких других общих точек, как например в случае шаровой поверхности $u = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в точке $x_0 = 0, y_0 = 0$, то линии пересечения не существует. Если же плоскость x, y не будет касательной плоскостью к нашей поверхности, то мы можем ожидать, как указывает наша интуиция, что линия пересечения указанного рода существует. Если плоскость $u = 0$ касается нашей поверхности, но пересекает ее при этом, как например касательная плоскость гиперболического параболоида $u = xy$ (черт. 25 и 26) в начале координат, то существует, правда, линия пересечения, но она состоит из отдельных ветвей, именно из оси x и оси y , и не дает поэтому однозначно определенной функции $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. Чтобы избежать подобных случаев и заранее обеспечить существование единственной ветви

у кривой пересечения, мы будем предполагать, что плоскость $u=0$ не является касательной плоскостью к поверхности в точке (x_0, y_0) .

Так как уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0) есть

$$u = (x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0)$$

(ввиду того, что $u_0 = F(x_0, y_0) = 0$), то требование, чтобы плоскость не являлась касательной плоскостью, равносильно требованию, чтобы не имели места одновременно в точке (x_0, y_0) равенства $F_x(x_0, y_0) = 0$ и $F_y(x_0, y_0) = 0$. Это условие в таком случае будет выполнено в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , ибо мы предполагаем, что производные F_x и F_y непрерывны.

Ввиду того, что x и y играют в наших рассуждениях совершенно одинаковую роль, мы имеем право, не ограничивая общности, предположить, что в рассматриваемой точке, а следовательно и в некоторой ее окрестности производная $F_y \neq 0$. Тогда мы можем ожидать, что в окрестности этой точки y действительно определяется как неявная функция от x . Если одновременно в точке (x_0, y_0) , а следовательно и в некоторой окрестности этой точки производная F_x остается неравной нулю, то мы можем подобным же образом рассматривать там x как неявную функцию от y .

3. Дифференцирование неявных функций. Общая теорема о существовании неявной функции, дающая в то же время правило дифференцирования неявной функции, гласит следующим образом. Если функция от x и y $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные F_x и F_y и если в точке (x_0, y_0) имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, в то время как частная производная $F_y(x_0, y_0)$ в этой точке отлична от нуля, то можно указать на оси x такой содержащий в себе точку x_0 интервал $x_1 \leq x \leq x_2$, что внутри этого интервала уравнением $F(x, y) = 0$ однозначно определяется непрерывная функция $y = f(x)$. Эта функция в точке x удовлетворяет равенству $y_0 = f(x_0)$ и в каждой точке указанного интервала имеет место равенство:

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Функция $y = f(x)$ дифференцируема, и ее производная или дифференциал выражаются формулами:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{и} \quad dy = df(x) = -\frac{F_x}{F_y} dx.$$

Допустим сперва, что первая часть теоремы о существовании и непрерывности функции, заданной в неявном виде, уже доказана, и проведем лишь доказательство указанного правила дифференцирования. Далее в п^{ом} мы дадим общее аналитическое доказательство существования и непрерывности неявной функции.

Исходным пунктом доказательства служит равенство:

$$F(x + h, y + k) = F(x, y) + hF_x(x, y) + kF_y(x, y) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k,$$

которое выражает дифференцируемость функции $F(x, y)$, вытекающую из допущенной нами непрерывности F_x и F_y . В этом равенстве ε_1 и ε_2 означают

числа, которые стремятся к нулю одновременно с h и k или с $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$. Ограничимся рассмотрением только таких пар значений (x, y) и $(x+h, y+k)$, у которых x и $x+h$ лежат в интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ и кроме того $y=f(x)$ и $y+k=f(x+h)$, так что $F(x, y)=0$ и $F(x+h, y+k)=0$; тогда предыдущее равенство примет вид:

$$0 = hF_x + kF_y + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k.$$

Ввиду того, что мы считаем доказанным непрерывность функции $f(x)$, одновременно с h будет стремиться к нулю и k , а вместе с тем ε_1 и ε_2 . Из нашего соотношения делением на hF_y ¹⁾ получаем:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{F_y}\right) \frac{k}{h} + \frac{F_x}{F_y} + \frac{\varepsilon_1}{F_y} = 0,$$

а отсюда, переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, имеем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} + \frac{F_x}{F_y} = 0;$$

но

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

следовательно получаем искомое правило дифференцирования в виде:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Мы можем также записать его в виде:

$$F_x + F_y y' = 0$$

или

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0.$$

Последнее равенство указывает, что в силу уравнения $F(x, y) = 0$ дифференциалы dx и dy нельзя выбрать независимо друг от друга.

С помощью полученного правила дифференцирования неявных функций можно в большинстве случаев проще продифференцировать неявную функцию, чем путем предварительного нахождения функции в явном виде. Можно притти этим путем к цели даже в том случае, когда это явное выражение функции, теоретически на основании теоремы о существовании, возможное, практически с помощью обычных функций (рациональных, тригонометрических и т. д.) или невозможно или чрезвычайно громоздко.

Дифференцируя по x равенство $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, правая часть которого представляет сложную функцию от x , по правилу дифференцирования слож-

¹⁾ Мы имеем право делить, так как по условию $F_y \neq 0$.

ной функции ¹⁾ и заменяя в правой части при этом y' через $-\frac{F_x}{F_y}$, получаем:

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3},$$

в качестве выражения для второй производной от $y=f(x)$.

Аналогично мы можем найти путем последовательного дифференцирования и дальнейшие производные от функции $y=f(x)$.

4. Примеры. 1. Из уравнения окружности

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

находим для функции $y=f(x)$ производную:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}.$$

Этот результат легко проверить непосредственно. Уравнение окружности неявно определяет, как легко видеть, решая уравнение относительно y , функцию $y = \sqrt{1-x^2}$ или функцию $y = -\sqrt{1-x^2}$ от x , смотря по тому, рассматриваем ли мы верхнюю полуокружность ($y \geq 0$) или нижнюю полуокружность ($y \leq 0$).

Дифференцируя, в первом случае получаем:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

а во втором случае:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

следовательно в обоих случаях

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

2. У лемнискаты (т. I, стр. 6)

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) \pm 0$$

было бы громоздко решать уравнение относительно y . При $x=0$, $y=0$ и $F=0$, $F_x=0$, $F_y=0$; следовательно здесь наше правило неприменимо в соответствии с тем, что через начало координат проходят две различных ветви лемнискаты. Для всех других точек кривой однако мы получаем согласно нашему правилу для производной функции $y=f(x)$ непосредственно:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x(x^2 + y^2) - 4a^2x}{4y(x^2 + y^2) + 4a^2y}.$$

¹⁾ При этом мы предполагаем существование и непрерывность частных производных второго порядка от $F(x, y)$.

Не подставляя в это выражение y как явную функцию от x , мы можем тем не менее сделать важное заключение относительно хода кривой. Например максимальные и минимальные значения могут появиться при $y' = 0$, т. е. при $x = 0$ или при $x^2 + y^2 = a^2$. Согласно уравнению лемнискаты при $x = 0$ и $y = 0$; однако в начале координат, как показывает черт. 25 на стр. 61 первого тома, нет экстремума. Подставляя в уравнение лемнискаты вместо $x^2 + y^2$ число a^2 , получаем дальнейшее соотношение $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$.

Из этих двух уравнений получаем четыре точки $\left(\pm \frac{a}{2} \sqrt{3}, \pm \frac{a}{2}\right)$ в качестве экстремальных точек кривой.

3. У листа Декарта (Folium Cartesii)

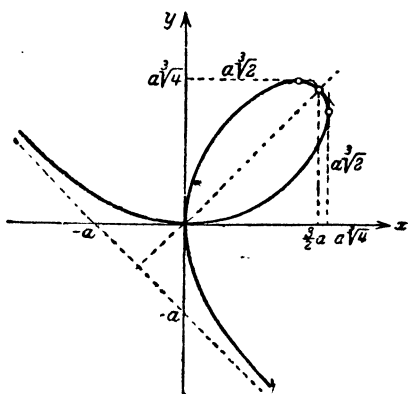
$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

(черт. 27) выражение y в качестве явной функции от x практически почти невыполнимо. В начале координат, где кривая сама себя пересекает, наше правило опять неприменимо, так как $F = 0$, $F_x = 0$ и $F_y = 0$. Для всех других точек кривой имеем:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Поэтому производная обращается в нуль при $x^2 - ay = 0$, следовательно при $y = \frac{x^2}{a}$ или (принимая во внимание уравнение кривой) при значениях

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$



Черт. 27. Лист Декарта.

5. Случай, когда число переменных больше двух. Общую теорему относительно неявных функций можно конечно обобщить на случай многих независимых переменных, а именно следующим образом. Пусть $F(x, y, \dots, z, u)$ — функция независимых переменных x, y, \dots, z, u , имеющая непрерывные частные производные $F_x, F_y, \dots, F_z, F_u$. Пусть для частной системы значений $x_0, y_0, \dots, z_0, u_0$ переменных x, y, \dots, z, u :

$$F(x_0, y_0, \dots, z_0, u_0) = 0, \quad \text{а} \quad F_u(x_0, y_0, \dots, z_0, u_0) \neq 0.$$

При этих условиях можно ограничить, некоторую область G около точки $(x_0, y_0, \dots, z_0, u_0)$, так чтобы в ней величина u была бы однозначно определена уравнением:

$$F(x, y, \dots, z, u) = 0$$

как функция $u = f(x, y, \dots, z)$ от x, y, \dots, z . Следовательно для каждой точки области G имеет место равенство:

$$F[x, y, \dots, z, f(x, y, \dots, z)] = 0;$$

при этом

$$u_0 = f(x_0, y_0, \dots, z_0).$$

Функция f является непрерывной функцией независимых переменных x, y, \dots, z и имеет непрерывные частные производные, которые определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} F_x + F_u f_x &= 0, \\ F_y + F_u f_y &= 0, \\ \vdots & \\ F_z + F_u f_z &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство существования и непрерывности будет дано в следующем номере; формулы дифференцирования вытекают из соответствующей формулы для случая одной независимой переменной; если например будем считать постоянными y, \dots, z , то получим первую из указанных формул.

Можно, если угодно, записать также наши формулы дифференцирования в виде одного уравнения:

$$F_x dx + F_y dy + \dots + F_z dz + F_u du = 0,$$

которое выражает следующее: если считать, что переменные x, y, \dots, z, u , входящие в функцию $F(x, y, \dots, z, u)$, не изменяются независимо друг от друга, а подчинены условию $F=0$, то линейные части их приращений также зависимы между собой, а именно они связаны между собой условием $dF=0$, т. е. линейным уравнением:

$$F_x dx + F_y dy + \dots + F_z dz + F_u du = 0,$$

относительно dx, dy, \dots, dz, du .

Если подставим вместо du выражение $u_x dx + u_y dy + \dots + u_z dz$ и приравняем затем все коэффициенты при независимых дифференциалах dx, dy, \dots, dz нулю, то действительно получим предыдущие формулы дифференцирования.

Замечу кстати, что понятие неявной функции позволяет дать общее определение понятия алгебраической функции. Мы называем $u=f(x, y, \dots)$ алгебраической функцией независимых переменных x, y, \dots , если u определена неявно уравнением $F(x, y, \dots, u)=0$, причем F есть целая рациональная функция аргументов x, y, \dots, u , т. е. если u удовлетворяет алгебраическому уравнению. Все функции, которые не удовлетворяют алгебраическому уравнению, называются трансцендентными.

В качестве примера применения наших формул дифференцирования рассмотрим уравнение шара:

$$x^2 + y^2 + u^2 - 1 = 0.$$

Для частных производных получаются значения:

$$u_x = -\frac{x}{u}, \quad u_y = -\frac{y}{u}.$$

Путем дальнейшего дифференцирования получаем:

$$u_{xx} = -\frac{1}{u} + \frac{x}{u^2} u_x = -\frac{x^2 + u^2}{u^3},$$

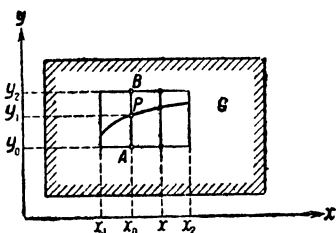
$$u_{xy} = \frac{x}{u^2} u_y = -\frac{xy}{u^3},$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} u_y = -\frac{y^2 + u^2}{u^3}.$$

6. Доказательство существования и непрерывности неявных функций. Хотя во многих случаях существование и непрерывность неявных функций непосредственно вытекают из того, что действительно можно решить уравнение $F(x, y) = 0$ с помощью обычных функций, однако необходимо все же аналитически в общем виде доказать указанную выше общую теорему.

В первую очередь мы приведем ограничение интервала $x_1 \leq x \leq x_2$, в котором уравнением $F(x, y) = 0$ однозначно определяется функция $y = f(x)$. При этом мы здесь совсем не будем стремиться к тому, чтобы этот интервал по возможности расширить.

Прежде всего заметим, что можно ограничить вокруг точки P с координатами x_0 и y_0 подходящим образом выбранную окрестность точки P , скажем прямоугольную область G , в которой повсюду производная F_y не равна нулю и сохраняет постоянный знак, так как по условию $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ и производная $F_y(x, y)$ непрерывна. Не нарушая общности, мы имеем право принять, что этот знак положительный т. е. что $F_y > 0$ во всей области G ; в самом деле, если бы F_y было меньше нуля, то достаточно было бы заменить функцию F через $-F$, что не нарушает уравнения $F(x, y) = 0$. Но при $F_y > 0$ функция $F(x, y)$, рассматриваемая как функция от y , возрастает на лежащем в области G отрезке любой прямой $x = \text{const}$, параллельной оси y , если мы будем пробегать этот отрезок в направлении возрастания y . Так как $F(x_0, y_0) = 0$, то в некоторой точке A , изображенной



Черт. 23.

на черт. 28, с координатами x_0 и y_1 (причем $y_1 < y_0$), лежащей на вертикальной прямой, проходящей через точку P , значение функции $F(x, y)$ должно быть отрицательным, а в точке B с координатами x_0 и y_2 ($y_2 > y_0$) значение функции должно быть положительным. В силу непрерывности функции $F(x, y)$ она имеет отрицательные значения на некотором лежащем внутри области G отрезке горизонтальной прямой $y = y_1$, проходящей через точку A , и положительные значения на отрезке параллельной прямой $y = y_2$, проходящей через точку B . Мы можем следовательно ограничить вокруг x_0 интервал $x_1 \leq x \leq x_2$ так, чтобы в нем значения функции $F(x, y)$ были отрицательны на горизонтальном отрезке, проходящем через A , и положительны на параллельном отрезке, проходящем через B , т. е. чтобы неравенства $F(x, y_1) < 0$ и $F(x, y_2) > 0$ имели место для всех точек этого интервала.

Ограничимся этим интервалом $x_1 \leq x \leq x_2$ и будем, не меняя значения x , изменять значение y в функции $F(x, y)$ от y_1 до y_2 , следовательно точка (x, y) остается в прямоугольной области:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

относительно которой мы предполагаем, что она целиком находится в области G . Тогда значение функции $F(x, y)$ монотонно и непрерывно возрастает от отрицательного значения к положительному и не может принимать в двух точках с той же абсциссой одного и того же значения. Следовательно каждому значению x из интервала $x_1 \leq x \leq x_2$ соответствует однозначно определенное значение y , которое удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$. Это значение y поэтому является функцией от x ; тем самым доказаны существование и однозначность неявной функции $y = f(x)$. При этом ясно обнаруживается, какое значение имеет требование $F_y \neq 0$: если бы производная F_y обращалась в нуль и при этом меняла бы знак, то функция $F(x, y)$ не изменялась бы монотонно на вертикальном отрезке (при постоянном значении x) и могла бы в иных случаях обратиться в нуль несколько раз, что нарушило бы однозначность определения y .

Наше доказательство только логически выясняет тот факт, что существует некоторая функция $y = f(x)$; это — образец чистого „доказательства существования“, в котором и речи нет о возможности практического вычисления ¹⁾.

Непрерывность функции $f(x)$ является почти очевидным следствием наших рассуждений. А именно прежде всего мы видим, что если прямоугольник $R': x'_1 \leq x \leq x'_2; y'_1 \leq y \leq y'_2$ лежит внутри рассмотренного выше прямоугольника R , то для этого меньшего прямоугольника получается такое же самое построение нашей неявной функции $y = f(x)$ и мы в меньшем прямоугольнике получаем, разумеется, те же значения для y , что и в большем. Чтобы доказать непрерывность функции $f(x)$, скажем, в точке x_0 , нам нужно показать, что непременно $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где ε — наперед заданное сколь угодно малое положительное число, если только выберем точку x достаточно близкой к точке x_0 . Для этого полагаем

$$y'_1 = y_0 - \varepsilon \quad \text{и} \quad y'_2 = y_0 + \varepsilon$$

и определяем для этих значений y'_1 и y'_2 соответствующий интервал на оси x -ов:

$$x'_1 \leq x \leq x'_2.$$

Тогда по предыдущему построению значение функции $y = f(x)$ в любой точке x этого интервала заключается между y'_1 и y'_2 , т. е. отличается от $y_0 = f(x_0)$ меньше чем на ε . В этом выражается непрерывность функции в точке x_0 . Так как мы то же самое рассуждение можем применить к любой другой точке интервала $x_1 \leq x \leq x_2$, то непрерывность функции доказана для всякой точки этого интервала.

¹⁾ То, что при общем доказательстве не дают таких практических методов, является существенным и принципиально важным шагом, облегчающим ведение доказательства.

Доказательство общей теоремы, относящейся к уравнению

$$F(x, y, \dots, z, u) = 0$$

с большим числом независимых переменных, проводится совершенно по такому же образцу и не представляет никаких затруднений.

§ 2. Уравнения кривых в неявном виде.

1. Уравнения плоских кривых в неявном виде. Раньше мы выражали уравнение плоской кривой в несимметрической форме $y = f(x)$, в которой предпочтение отдается одной из координат. Касательная и нормаль к кривой выражались соответственно уравнениями:

$$\eta = y + (\xi - x)f'(x)$$

и

$$\eta = y - (\xi - x) \frac{1}{f'(x)},$$

причем ξ и η выражают текущие координаты касательной или нормали, а x и y — координаты точки кривой. Подобным же образом было дано выражение для кривизны и признаки для точек перегиба. Теперь мы выведем аналогичные формулы для случая, когда кривая представлена в неявном виде уравнением $F(x, y) = 0$. При этом будем предполагать, что в рассматриваемой точке не обращаются одновременно в нуль F_x и F_y , т. е., что в этой точке $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$.

Примем например, что $F_y \neq 0$, тогда, заменяя y' через $-\frac{F_x}{F_y}$, получаем для касательной в точке (x, y) непосредственно уравнение в текущих координатах ξ и η :

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y = 0,$$

а для нормали:

$$(\xi - x)F_y - (\eta - y)F_x = 0.$$

Мы можем также непосредственно характеризовать касательную, не проходя околным путем через уравнение кривой в явном виде, следующим образом. Если a и b какие угодно две постоянные, то уравнение

$$a(\xi - x) + b(\eta - y) = 0$$

в текущих координатах ξ и η представляет прямую, проходящую через точку P с координатами (x, y) . Если P есть точка кривой, т. е. имеет место равенство $F(x, y) = 0$, то будем искать такую проходящую через нее прямую, что расстояние соседней точки P_1 , лежащей на кривой, с координатами $x_1 = x + h$ и $y_1 = y + k$ (следовательно $F(x_1, y_1) = F(x + h, y + k) = 0$), от этой прямой при неограниченном убывании $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ представляет бесконечно-малую более высокого порядка, чем ρ . Но в силу предполагаемой дифференцируемости функции F непременно

$$F(x + h, y + k) = F(x, y) + hF_x + kF_y + \varepsilon\rho,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Обе точки P и P_1 лежат на кривой, поэтому $hF_x + kF_y = -\varepsilon\rho$. Так как мы предполагаем, что в рассматриваемой точке $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$, то мы можем записать последнее равенство также в виде

$$h \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} + k \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \varepsilon_1 \rho,$$

причем $\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$ также представляет число, стремящееся к нулю,

когда ρ стремится к нулю. Полагая $a = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$ и $b = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$,

можем рассматривать левую часть последнего равенства как результат подстановки вместо ξ и η в написанное в нормальном виде уравнение прямой $a(\xi - x) + b(\eta - y) = 0$ координат точки $(x_1 = x + h, y_1 = y + k)$, т. е. как расстояние этой точки от прямой. Рассматриваемая точка P_1 на кривой удалена следовательно от прямой на расстояние $\varepsilon_1 \rho$, которое представляет бесконечно-малую более высокого порядка, чем ρ . Уравнение

$$\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} (\xi - x) + \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} (\eta - y) = 0,$$

или же $F_x(\xi - x) + F_y(\eta - y) = 0$ совпадает с полученным раньше уравнением касательной, так что мы можем теперь определить касательную в точке P как прямую, удаленную от всякой соседней точки P_1 кривой на расстояние, представляющее бесконечно-малую более высокого порядка, чем расстояние PP_1 ¹⁾.

Направляющие косинусы нормали нашей кривой даются величинами

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}},$$

представляющими координаты единичного вектора, направленного по нормали, т. е. вектора, длина которого равна единице, выходящего из точки $P(x, y)$ по направлению нормали.

Рассмотрим теперь не только кривую $F(x, y) = 0$, но вообще кривые

$$F(x, y) = c,$$

где $c \neq$ любое постоянное число; тогда в наших предыдущих рассуждениях ничего не изменится. Нам нужно только заменить здесь функцию $F(x, y)$ функцией $F(x, y) - c$, имеющей те же частные производные, следовательно уравнения касательной и нормали имеют для всех этих кривых указанный выше вид.

Совокупность всех кривых $F(x, y) = c$, которые получаются, если c пробегает все значения некоторого интервала, образует семейство кривых.

¹⁾ Легко убедиться, что не может существовать еще одна такая прямая; таким образом наше требование однозначно характеризует касательную.

Плоский вектор с координатами F_x и F_y , градиент функции $F(x, y)$, перпендикулярен во всякой точке к проходящей через нее кривой семейства, как мы уже видели на стр. 83. Отсюда мы снова получаем уравнение касательной, так как направленный по касательной вектор с координатами $\xi - x$ и $\eta - y$ должен быть перпендикулярен к градиенту, следовательно скалярное произведение

$$(\xi - x) F_x + (\eta - y) F_y$$

должно равняться нулю.

Неопределенность знака квадратного корня, встречающегося в наших выражениях, указывает на то, что в сущности мы можем еще произвольно выбрать за положительное направление нормали направление по одну или по другую сторону от кривой. Мы будем всегда брать положительное значение корня и тем самым фиксируем определенное направление на нормали; при этом следует обратить внимание на то, что это направление переходит в противоположное, если заменить функцию $F(x, y)$ функцией $-F(x, y)$, что не отражается на геометрическом представлении кривой. (Впрочем по поводу положительного направления нормали смотрите сказанное далее в главе V.)

В первой части мы видели, что необходимым условием для появления точки перегиба у кривой, заданной в явном виде $y = f(x)$, является обращение в нуль второй производной $f''(x)$. Заменяя $f''(x)$ выражением

$$f''(x) = - \frac{F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3},$$

из предыдущего параграфа, получаем в качестве необходимого условия для появления точки перегиба на кривой, заданной в неявном виде, уравнение:

$$F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2 = 0.$$

В этом условии ни одной из переменных x и y не отдается предпочтения перед другой; это условие имеет вполне симметричный характер и не связано с допущением, что $F_y \neq 0$.

Подставляя наши выражения для y' и y'' в ранее найденное выражение для кривизны

$$k = \frac{y''}{V(1 + y'^2)^{3/2}},$$

получаем формулу:

$$k = \frac{F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}},$$

которая также вполне симметрична ¹⁾.

Если две кривые $F(x, y) = 0$, и $G(x, y) = 0$ пересекаются в точке с координатами x и y , то мы называем углом между этими двумя кривыми угол ω , составленный их касательными или их нормальными в точке пересечения; косинус этого угла выражается, принимая во внимание

¹⁾ См. о знаке кривизны в первой части, стр. 239.

направляющие косинусы обеих нормалей и формулу для скалярного произведения (гл. I, § 1, п° 3), равенством:

$$\cos \omega = \frac{F_x G_x + F_y G_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cdot \sqrt{G_x^2 + G_y^2}}.$$

Если берем, как всегда, положительные значения корней, чем устанавливается определенное направление на нормалях и на касательных, то косинус определяется однозначно, а вместе с тем и угол между кривыми однозначно определяется как угол, образованный положительными направлениями нормалей.

В частности из последней формулы, полагая $\omega = \frac{\pi}{2}$, получаем условие перпендикулярности (условие ортогональности):

$$F_x G_x + F_y G_y = 0.$$

Условием касания кривых является требование, чтобы отношение дифференциалов $dy:dx$ было одним и тем же для обеих кривых, т. е. должно иметь место соотношение:

$$dy:dx = -F_x:F_y = -G_x:G_y,$$

которое можно также записать в виде:

$$F_x G_y - F_y G_x = 0.$$

В качестве примера рассмотрим эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение касательной в точке (x, y) имеет вид:

$$(\xi - x) \frac{x}{a^2} + (\eta - y) \frac{y}{b^2} = 0$$

или

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1,$$

результат, известный из элементарной аналитической геометрии.

Для кривизны имеем:

$$k = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

она достигает наибольшего значения в вершинах $y = 0$, $x = \pm a$, а именно в этих точках $k = \frac{a}{b^3}$; наименьшее значение она принимает в двух других вершинах $x = 0$, $y = \pm b$, где $k = \frac{b}{a^3}$.

2. Особые точки кривой. Еще несколько замечаний по поводу особых точек кривой. Я ограничусь здесь только несколькими типичными примерами и отсылаю к дополнениям к этой главе.

Заметим сперва, что в наших только что выведенных формулах часто встречается в знаменателе $F_x^2 + F_y^2$. Обращение в нуль этой величины, т. е. одновременное существование равенств $F_x = 0$ и $F_y = 0$ в некоторой точке кривой указывает на некоторую особенность. Эта особенность прежде всего проявляется в том, что выражение $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ для подъема касательной в такой точке неприменимо.

Точка кривой называется *правильной*, если в окрестности этой точки ордината y может быть выражена как функция от x , имеющая непрерывную производную, или же, наоборот, если x может быть представлена в виде функции с непрерывной производной от y . В обоих случаях кривая имеет касательную и очень мало отличается от этой касательной в окрестности рассматриваемой точки. Все точки кривой, в которых это не имеет места, называются *особыми* точками.

Из теории неявных функций мы знаем, что точка кривой $F(x, y) = 0$ безусловно является *правильной*, когда $F_y \neq 0$, так как в этом случае уравнение можно разрешить относительно y . Подобным же образом точка будет *правильной*, если $F_x \neq 0$. Следовательно особые точки кривой надо искать среди тех точек, которые удовлетворяют не только уравнению кривой, но и уравнениям:

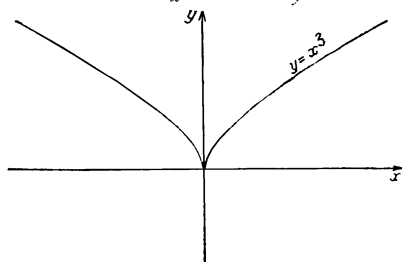
$$F_x = 0 \quad \text{и} \quad F_y = 0.$$

Важный тип особых точек представляют так называемые *узловые* точки; узловой называется точка, через которую проходят две или большее число различных ветвей кривой, как например начало координат для лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

В окрестности такой точки невозможно представить y как однозначную функцию от x или же x как однозначную функцию от y .

Условие $F_x = 0$ и $F_y = 0$ является необходимым, но ни в коем случае не является достаточным условием для существования узловой точки. Могут иметь место совершенно иные явления, например может появиться точка заострения. В качестве примера рассмотрим кривую



Черт. 29.

$$y^3 - x^2 = 0,$$

которая имеет вид, изображенный на черт. 29, т. е. имеет точку заострения в начале координат. В этой точке действительно частные производные первого порядка от F обращаются в нуль. Совершенно такую же особенность представляет кривая, получающаяся из данной поворотом на 90° , которая выражается уравнением:

$$F(x, y) = x^3 - y^2 = 0.$$

Однако может случиться, что хотя и удовлетворяются оба уравнения $F_x = 0$ и $F_y = 0$, но кривая в этой точке не имеет особенностей, и точка правильная. Примером служит кривая

$$y^3 - x^4 = 0$$

или в явной форме

$$y = x^{\frac{4}{3}}.$$

Непосредственно видно, что кривая подобно параболе расположена симметрично относительно оси y и касается оси x в начале координат, так как

$$(-x)^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}} \quad \text{и} \quad y' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}.$$

Что начало координат все же представляет некоторую особенность, мы видим из того, что вторая производная y'' обращается в бесконечность в начале координат; следовательно в начале координат кривизна бесконечна, в то время как направление касательной в этой точке не обнаруживает никаких особенностей. Дальнейшим примером служит кривая $(y - x)^2 = 0$, являющаяся прямой, все точки которой правильны, хотя повсюду $F_x = 0$ и $F_y = 0$.

Эти примеры указывают, что при разыскании и исследовании особых точек кривой недостаточно установить, что удовлетворяются уравнения $F_x = 0$ и $F_y = 0$, но в каждом отдельном случае необходимо особое исследование (см. дополнения § 2, стр. 168).

3. Уравнение поверхности в неявном виде. До сих пор мы обычно функцию $z = f(x, y)$ (мы пишем теперь z вместо u) геометрически представляли поверхностью в пространстве, рассматривая x, y, z как прямоугольные координаты точки. Если же нам первоначально дана не функция, а геометрически заданная поверхность, то предпочтение, которое оказывается при таком функциональном выражении координате z , приведет к неудобствам совершенно так же, как в случае выражения плоской кривой с помощью уравнения вида $y = f(x)$.

Более естественным и более общим путем является представление поверхностей в пространстве уравнениями вида $F(x, y, z) = 0$ или $\xi(x, y, z) = \text{const}$, например удобнее поверхность шара представить уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, а не уравнением $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Уравнение $z - f(x, y) = 0$ представляет частный случай этого более общего уравнения.

Чтобы составить уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке (x, y, z) , допустим, что в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ ¹⁾, т. е., что по крайней мере, одна из частных производных, например F_z , не равна нулю.

Тогда можно из уравнения поверхности определить $z = f(x, y)$ как явную функцию от x и y . Подставляя в уравнение (стр. 65) касательной плоскости

$$\zeta - z = (\xi - x)z_x + (\eta - y)z_y$$

¹⁾ Обращение в нуль этого выражения опять-таки, вообще говоря, указывает на появление особенностей, но мы на этом останавливаться не будем.

вместо частных производных z_x и z_y их значения

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{и} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z},$$

получим уравнение касательной плоскости в симметрической форме:

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0,$$

причем ξ , η и ζ означают текущие координаты.

Мы можем получить это уравнение непосредственно из уравнения поверхности в неявном виде аналогично тому, как это было сделано для касательной к плоской кривой, если поставим задачу найти такую плоскость, проходящую через точку (x, y, z) поверхности, что расстояние любой соседней точки $(x+h, y+k, z+l)$ поверхности от этой плоскости будет бесконечно малой более высокого порядка, нежели выражение

$$\rho = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Для направляющих косинусов нормали к поверхности, т. е. нормали к касательной плоскости получаются согласно элементарным теоремам аналитической геометрии (см. гл. I) выражения:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

причем на нормали устанавливается определенное направление, если будем брать положительное значение квадратного корня (см. также стр. 110).

Если две поверхности $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ пересекаются в некоторой точке, то под углом ω между этими поверхностями разумеют угол между их касательными плоскостями или, что то же, угол между их нормальными; этот угол следовательно дается выражением:

$$\cos \omega = \frac{F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \cdot \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}.$$

Отсюда в частности получаем условие ортогональности:

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$$

Мы можем также рассматривать не отдельную поверхность $F(x, y, z) = 0$, а семейство поверхностей $F(x, y, z) = c$, где c для каждой поверхности семейства представляет постоянное число. При этом предполагаем, что через каждую точку пространства или по крайней мере некоторой части пространства проходит одна и только одна поверхность семейства, т. е., что семейство, как говорят, однократно покрывает эту часть пространства. Тогда отдельные поверхности называются поверхностями уровня функции $F(x, y, z)$. В § 7 главы II мы рассматривали градиент этой функции, т. е. вектор с составляющими F_x , F_y и F_z . Мы видим, что эти составляющие пропорциональны направляющим косинусам нормали, и заключаем отсюда, что градиент в точке с координатами

x, y, z перпендикулярен к поверхности уровня, проходящей через эту точку. (Если считать этот факт известным из § 7, главы II, то получается новый простой вывод уравнения касательной плоскости, такой же, как раньше (стр. 110) для уравнения касательной.)

В качестве примера рассмотрим поверхность шара

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0;$$

она имеет в точке x, y, z касательную плоскость

$$(\xi - x) 2x + (\eta - y) 2y + (\zeta - z) 2z = 0$$

или

$$\xi x + \eta y + \zeta z - r^2 = 0.$$

Направляющие косинусы нормали относятся между собой как $x:y:z$, следовательно нормаль направлена по радиусу-вектору точки (x, y, z) .

Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

главные оси которого совпадают с осями координат, уравнение касательной плоскости гласит:

$$\xi \frac{x}{a^2} + \eta \frac{y}{b^2} + \zeta \frac{z}{c^2} - 1 = 0.$$

§ 3. Системы функций, преобразования и отображения.

1. Общие замечания. Полученные нами результаты относительно неявных функций дают возможность изучать системы функций, т. е. несколько функций, рассматриваемых одновременно. В этом параграфе мы рассмотрим особенно важный случай таких систем, когда число функций равно числу независимых переменных. Выясним сперва значение таких систем функций для случая двух независимых переменных. Пусть

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \psi(x, y)$$

две функции, относительно которых мы предположим, что они обе дифференцируемы в некоторой области G плоскости x, y ; тогда мы можем истолковать эту систему двумя различными способами. Первая интерпретация заключается в отображении или преобразовании. Точке P с координатами x, y в плоскости x, y соответствует точка Π (изображение точки P) с координатами ξ и η в плоскости ξ, η .

Таким отображением например является аффинное отображение или аффинное преобразование

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by, \\ \eta &= cx + dy, \end{aligned}$$

рассмотренное в главе I, где a, b, c и d — постоянные числа.

Часто точки (x, y) и (ξ, η) рассматриваются как точки одной и той же плоскости; тогда мы имеем дело с преобразованием плоскости x, y в себе самой ¹⁾.

Основной задачей при преобразовании следует считать задачу об его обращении, т. е. вопрос о том, можно ли на основании наших предыдущих уравнений $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$ рассматривать обратно x и y как функции от ξ и η , как это сделать и каким образом эти обратные функции дифференцировать.

Если точка (ξ, η) , которая служит изображением точки (x, y) , пробегает область Γ в плоскости ξ, η , в то время как точка (x, y) пробегает область G , то область Γ называется изображением области G . Если при этом двум различным точкам области G всегда соответствуют две различные точки области Γ , то мы для каждой точки области Γ знаем, изображением какой точки области G она является. Мы можем поэтому обратно каждой точке области Γ отнести исходную точку в области G , т. е. однозначно обратить преобразование или однозначно определить x и y как функции

$$x = g(\xi, \eta), \quad y = h(\xi, \eta)$$

от ξ и η . В этом случае отображение называют взаимно-однозначным (или одно-однозначным), а систему $x = g(\xi, \eta)$ и $y = h(\xi, \eta)$ называют преобразованием или отображением, обратным первоначальному.

Если точка P с координатами x и y пробегает некоторую кривую в области G , то изображение этой точки пробегает также кривую в области Γ ; эта кривая называется изображением первоначальной. Например кривой $x = c$, т. е. прямой, параллельной оси y , соответствует кривая в плоскости ξ, η , которая выражается в параметрической форме уравнениями:

$$\xi = \varphi(c, y), \quad \eta = \psi(c, y)$$

с помощью параметра y . Подобным же образом прямой $y = k$ соответствует кривая

$$\xi = \varphi(x, k), \quad \eta = \psi(x, k).$$

Представим себе, что c и k принимают последовательно различные значения $c_1, c_2, c_3, \dots; k_1, k_2, k_3, \dots$; тогда прямоугольной координатной сетке прямых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ прямоугольной системы координат x, y (например сети прямых на миллиметровой бумаге) соответствует некоторая, вообще говоря, криволинейная сеть в плоскости (ξ, η) (черт. 30, 31). Если обратное отображение выражено уравнениями:

$$x = g(\xi, \eta), \quad y = h(\xi, \eta),$$

¹⁾ Заметим кстати, что функцию одного независимого переменного $\xi = f(x)$ можно также интерпретировать как отображение, если привести в соответствие точке x на оси x точку ξ на оси ξ ; с помощью этого соответствия ось x или часть ее отображается на ось ξ или на часть этой оси. Равномерная „шкала“ равноотстоящих точек на оси x превращается, вообще говоря, в неравномерную шкалу точек ξ на оси ξ (точки сгущаются или разрежаются); шкалу на оси ξ можно взять для наглядного представления функции $\xi = f(x)$. Такое рассмотрение действительно часто применяется и оказывается полезным в приложениях (номография).

то мы можем также представить оба семейства этой криволинейной сети в неявном виде уравнениями:

$$g(\xi, \eta) = c$$

и соответственно

$$h(\xi, \eta) = k.$$

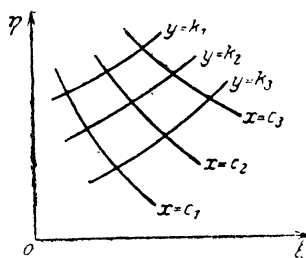
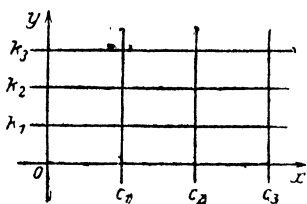
Подобным же образом обоим семействам прямых $\xi = \gamma$ и $\eta = \chi$ в плоскости изображения ξ, η соответствуют два семейства кривых

$$\varphi(x, y) = \gamma$$

и

$$\psi(x, y) = \chi$$

в исходной плоскости x, y .



Черт. 30 и 31. Сеть кривых $x = \text{const.}$, $y = \text{const}$ в плоскости x, y и плоскости ξ, η .

В качестве примера рассмотрим отображение с помощью обратных радиусов или отражения в круге радиуса, равного единице (это отображение называется также инверсией), которое задается уравнениями:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Точке P с координатами x и y соответствует точка Π с координатами ξ и η на том же луче OP по закону

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

или $O\Pi = \frac{1}{OP}$, т. е. длине радиус-вектора, идущего в точку P , соответствует обратная величина, как длина радиуса-вектора, идущего в точку Π . Точки, лежащие внутри круга радиуса 1, отображаются на точки, лежащие вне его, и обратно.

При отображении с помощью обратных радиусов мы получаем, в силу того, что

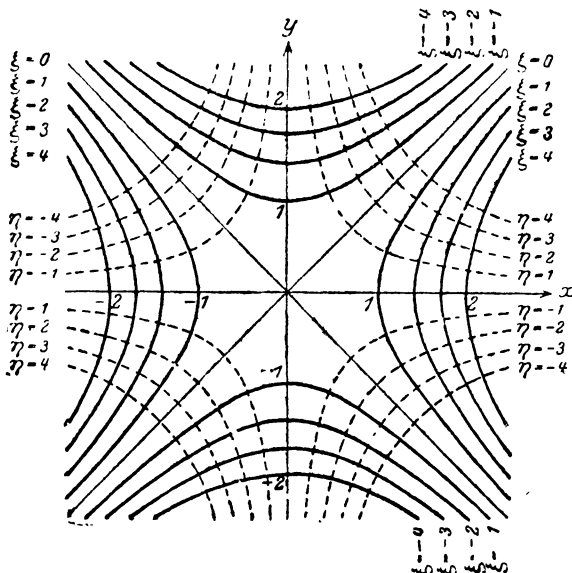
$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

в качестве обратного преобразования:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

т. е. опять отражение в круге радиуса 1.

За область G мы можем принять всю плоскость x, y за исключением точки нуль, а за область Γ — всю плоскость ξ, η за исключением начала координат. Прямые $\xi = c$ и $\eta = k$ плоскости ξ, η соответствуют круги



Черт. 32.

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{c} x = 0$$

и

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{k} y = 0$$

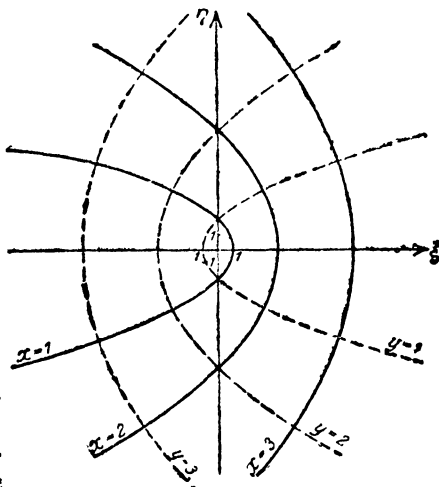
плоскости x, y , которые касаются соответственно оси y и оси x в начале координат; подобным же образом криволинейная сеть в плоскости ξ, η состоит из двух пучков окружностей, касающихся в начале координат соответственно оси ξ и оси η .

В качестве следующего примера рассмотрим отображение:

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy.$$

Линиям $\xi = \text{const}$ соответствуют в плоскости x, y равнобочные гиперболы $x^2 - y^2 = \text{const}$, асимптотами которых являются прямые $x = y$ и $x = -y$; линиям $\eta = \text{const}$ в свою очередь соответствует семейство равнобочных гипербол $2xy = \text{const}$, имеющих асимптотами оси координат. Гиперболы одного семейства пересекают гиперболы другого семейства под прямым углом (черт. 32). Прямые, параллельные осям координат в плоскости x, y , соответствуют в плоскости ξ, η два семейства парабол (черт. 33), а именно прямым $x = c$ соответствуют параболы $\eta^2 = 4c^2(c^2 - \xi)$, а прямым $y = k$ — параболы $\eta^2 = 4k^2(k^2 + \xi)$. Для всех этих парабол начало координат является фокусом, а ось ξ — осью (семейство софокусных и соосных парабол).

Обратимые преобразования наглядно иллюстрируются и имеют важные применения при изучении деформаций или движения непрерывно распределенного вещества, например жидкости. Представим себе, что это вещество в некоторый момент времени непрерывно распределено на двумерной об-



Черт. 33.

ласти G и затем деформируется при движении; тогда вещество, расположенное первоначально над областью G , будем затем покрывать некоторую область Γ , вообще говоря, отличную от G . Положение каждой частицы вещества в начальный момент может быть охарактеризовано с помощью ее координат x и y в области G , а после деформации ее координатами ξ и η — в области Γ . Одно-однозначный характер преобразования, которое устанавливает соответствие между точкой (x, y) , с одной стороны, и точкой (ξ, η) , с другой, является просто математическим выражением того с точки зрения физики очевидного факта, что отдельные частицы и после деформации сохраняют свою индивидуальность, т. е. что отдельные частицы остаются отдельными.

2. Криволинейные координаты. С первой интерпретацией (отображением) тесно связана вторая интерпретация системы уравнений $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ как преобразования координат в плоскости, а именно в случае если φ и ψ — нелинейные функции, то мы имеем не аффинное преобразование координат, а так называемое преобразование к общим криволинейным координатам.

Попрежнему принимаем, что каждой точке в области G плоскости x, y соответствует некоторая точка (ξ, η) области Γ в плоскости ξ, η и что обратно каждой точке области Γ однозначно соответствует пара значений (x, y) , т. е. что отображение области G на область Γ в смысле, указанном в п^о 1, взаимно-однозначно. Обозначим обратные функции опять через $x = g(\xi, \eta)$ и $y = h(\xi, \eta)$.

Под координатами точки P области G мы можем понимать любую пару чисел, которая однозначно определяет положение точки P в области G . Прямоугольные координаты представляют простейший пример координат, сохраняющих смысл во всей плоскости. Другим типичным примером координат являются полярные координаты в плоскости x, y , которые вводятся с помощью формул:

$$\xi = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\eta = \vartheta = \arctg \frac{y}{x}; \quad (0 \leq \vartheta < 2\pi).$$

Вообще можно, если задана указанная система функций $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, каждой точке P с координатами x и y отнести соответствующие значения ξ и η в качестве новых координат. В самом деле системой значений (ξ, η) , если эта система принадлежит области Γ , однозначно определяется система значений (x, y) , т. е. положение точки P в области G , следовательно мы имеем право назвать ξ и η координатами точки P . Тогда в плоскости x, y получаем два семейства координатных линий: $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$, которые определяются в неявном виде уравнениями $\varphi(x, y) = \text{const}$ и $\psi(x, y) = \text{const}$.

Эти координатные линии покрывают область G , вообще говоря, криволинейной координатной сетью, поэтому наши координаты ξ и η называются также криволинейными координатами области.

Укажем еще раз на то, как тесно связаны между собой обе интерпретации нашей системы уравнений. Кривые, которые при отображении плоскости x, y на плоскость ξ, η являются изображениями прямых, параллель-

ных осей координат в плоскости x, y , представляют с точки зрения интерпретации с помощью преобразования координат координатные линии криволинейных координат $x=g(\xi, \eta)$, $y=h(\xi, \eta)$ в плоскости ξ, η . Обратно, координатные линии криволинейных координат $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ в плоскости x, y являются просто изображениями прямых, параллельных осям в плоскости ξ, η , при отображении этой плоскости на плоскость x, y с помощью $x=g(\xi, \eta)$ и $y=h(\xi, \eta)$. Даже в том случае, когда мы разумеем под ξ и η криволинейные координаты в плоскости x, y , необходимо для полной ясности рассматривать плоскость ξ, η и в ней точку с прямоугольными координатами ξ и η , изменяющуюся в некоторой области Γ . Вообще целесообразно рассматривать одновременно обе интерпретации: отображение и преобразование координат.

Пример. Параболические координаты. Введем в плоскости x, y криволинейные координаты с помощью формул ¹⁾:

$$\xi = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

и

$$\eta = -x - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Координатные линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ являются „соосными“ и „софокусными“ параболы; фокус которых находится в начале координат, а ось совпадает с осью x , так как

$$(\xi + x)^2 = x^2 + y^2$$

или

$$y^2 = 2\xi \left(x + \frac{\xi}{2} \right)$$

и

$$(\eta + x)^2 = x^2 + y^2$$

или

$$y^2 = 2\eta \left(x + \frac{\eta}{2} \right)$$

(эти параболы изображены на черт. 33, стр. 118, нужно только изменить обозначения на чертеже ²⁾). Новыми координатами точки (x, y) являются параметры ξ, η тех двух парабол, которые через нее проходят, поэтому говорят о параболических координатах. Можно получить ξ и η

¹⁾ Как всегда, мы разумеем под корнем его положительное значение.

²⁾ Заменяем название осей ξ и η через x и y , тогда на черт. 33 имеем семейство парабол $y^2 = 4c^2(c^2 - x)$, являющихся изображением прямых $\xi = c$, и семейство $y^2 = 4c^2(c^2 + x)$, являющееся изображением прямых $\eta = c$ (см. стр. 118). Но первое семейство совпадает с семейством парабол $y^2 = 2\eta \left(x + \frac{\eta}{2} \right)$, если взять $\eta = -2c^2$, следовательно на чертеже надо заменить надписи $x=1, x=2$ и т. д. надписями $\eta = -2, \eta = -8$ и т. д. Аналогично второе семейство совпадает с семейством $y^2 = 2\xi \left(x + \frac{\xi}{2} \right)$, если взять $\xi = 2c^2$, следовательно вместо надписей $y=1, y=2, y=3$ должны быть надписи $\xi = 2, \xi = 8, \xi = 18$.

следующим образом: подставляем рассматриваемую пару значений (x, y) в уравнение

$$y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right),$$

которое при переменном параметре p представляет все семейство парабол, и решаем это квадратное относительно p уравнение: ξ и η являются корнями этого уравнения, ξ — положительным, а η — отрицательным. Уравнения

$$\xi = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

и

$$\eta = -x - \sqrt{x^2 + y^2},$$

рассматриваемые как формулы отображения, дают отображение всей плоскости x, y на правую нижнюю четверть (четвертую четверть) плоскости ξ, η . Двум точкам, симметрично расположенным относительно оси x , соответствует однако одна и та же точка в плоскости ξ, η ; эти точки являются точками пересечения одной и той же пары парабол семейства и имеют поэтому те же самые значения ξ и η . Для того чтобы обращение

$$x = -\frac{\xi + \eta}{2} \quad \text{и} \quad y = \pm \sqrt{-\xi\eta}$$

стало однозначным, необходимо выбрать определенный знак корня, например положительный. Тогда верхняя половина плоскости x, y одно-однозначно отображается на четвертый квадрант плоскости ξ, η . Изображениями прямых $x = \text{const} = k$, параллельных оси y , являются параллельные прямые $\eta = -\xi - 2k$, а изображениями прямых $y = \text{const} = c$, параллельных оси x , служат равнобедренные гиперболы $-\xi\eta = c^2$.

3. Обобщение на случай многих переменных. В случае трех или большего числа независимых переменных дело обстоит совершенно аналогично. Например в случае трех независимых переменных мы можем рассматривать систему трех непрерывно дифференцируемых функций:

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \psi(x, y, z), \quad \zeta = \chi(x, y, z),$$

определенных в некоторой области G пространства x, y, z , как отображение области G на некоторую область Γ пространства ξ, η, ζ . Допустим, что это отображение области G на область Γ можно однозначно обратить, т. е. что и обратно для каждой точки (ξ, η, ζ) из области Γ можно однозначно вычислить координаты x, y, z исходной точки в G с помощью функций:

$$x = g(\xi, \eta, \zeta), \quad y = h(\xi, \eta, \zeta), \quad z = l(\xi, \eta, \zeta),$$

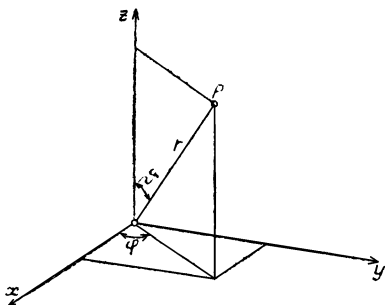
тогда ξ, η и ζ можно рассматривать так же, как общие криволинейные координаты точки P в области G . Поверхности $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ или

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const}, \quad \chi(x, y, z) = \text{const}$$

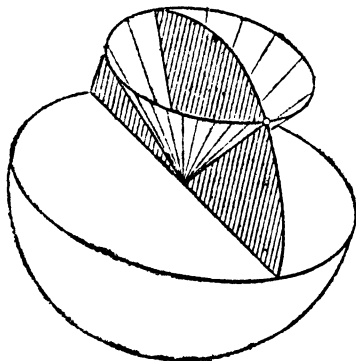
образуют систему трех семейств поверхностей, пересекающих область G ; эти поверхности называются координатными поверхностями.

Так же как и для случая двух переменных, можно наглядно иллюстрировать взаимно-однозначные преобразования для случая трех переменных, как деформации непрерывно распределенного вещества в трехмерном пространстве.

Важнейшим примером преобразования координат является преобразование к полярным координатам в пространстве. В этой системе координат положение точки P определяется, во-первых, ее расстоянием $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ от начала координат, во-вторых, ее долготой φ , т. е. углом, образуемым плоскостью, проходящей через точку P и ось z с плоскостью x, z , и, в-третьих, полярным углом ϑ , т. е. углом между радиус-вектором OP и положительным направлением оси z . Из черт. 34 непосред-



Черт. 34. Полярные координаты в пространстве.



Черт. 35. Координатные поверхности системы полярных координат.

ственно получаем формулы преобразования для перехода от полярных координат r, ϑ, φ к прямоугольным:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = r \cos \vartheta,$$

из которых путем обращения находим:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Подобно тому как для полярных координат в плоскости особой точкой является начало координат, где угол остается неопределенным, так для полярных координат в пространстве все точки оси z являются особыми, так как для них остается неопределенной долгота φ ; в начале координат кроме того становится неопределенным и полярный угол ϑ .

Координатными поверхностями для полярных координат в пространстве являются, во-первых, при различных постоянных значениях r , концентрические шаровые поверхности с центром в начале координат, во-вторых, при различных постоянных значениях φ , плоскости, проходящие через ось z , и, в-третьих, при различных постоянных значениях ϑ , прямые круговые конические поверхности, осью которых служит ось z , а вершиной — начало координат (черт. 35).

4. Формулы дифференцирования обратных функций. В некоторых практически важных случаях мы можем, как в предыдущих примерах, непосредственно решить заданную систему уравнений и видим, что обратные функции непрерывны и имеют непрерывные производные. Примем в связи с этим, пока без доказательства, тот факт, что функции можно обратить и что обратные функции дифференцируемы. Можно вычислить производные обратных функций, не разрешая данной системы уравнений, следующим образом. Подставляем обратные функции $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$ в данные уравнения $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \phi(x, y)$. Тогда в правых частях получаются сложные функции $\varphi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]$ и $\phi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]$, которые равны соответственно ξ и η . Продифференцируем теперь тождества:

$$\xi = \varphi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)],$$

$$\eta = \phi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)],$$

каждое по ξ и по η , рассматривая ξ и η как независимые переменные. Применяя при дифференцировании правых частей доказанное нами раньше правило дифференцирования сложных функций, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi_x g_\xi + \varphi_y h_\xi, & 0 &= \varphi_x g_\eta + \varphi_y h_\eta, \\ 0 &= \phi_x g_\xi + \phi_y h_\xi, & 1 &= \phi_x g_\eta + \phi_y h_\eta. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим искомые частные производные:

$$g_\xi = \frac{\phi_y}{D}, \quad g_\eta = \frac{-\phi_x}{D}, \quad h_\xi = \frac{-\phi_x}{D}, \quad h_\eta = \frac{\varphi_x}{D}$$

обратных функций $x = g(\xi, \eta)$ и $y = h(\xi, \eta)$ по ξ и η , выраженные с помощью частных производных исходных функций $\varphi(x, y)$ и $\phi(x, y)$ по x и y . При этом мы полагаем для краткости

$$D = \xi_\eta \eta_y - \xi_y \eta_\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Это выражение D , которое мы считаем отличным от нуля в рассматриваемой точке, называют функциональным определителем функций $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \phi(x, y)$ по переменным x и y .

Мы в предыдущем, как иногда и раньше, вместо подробной записи $\xi = \varphi(x, y)$ и т. д., при которой делается различие между величиной ξ и функциональной зависимостью $\varphi(x, y)$, воспользовались более

короткой записью $\xi(x, y)$ и т. д.; этим сокращенным обозначением мы будем часто пользоваться и в дальнейшем, если только при этом будет исключена возможность недоразумений.

Например для полярных координат в плоскости, выраженных в прямоугольных координатах,

$$\xi = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \eta = \vartheta = \arctg \frac{y}{x},$$

частные производные имеют вид:

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r},$$

$$\vartheta_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, \quad \vartheta_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2}.$$

Следовательно функциональный определитель равен:

$$D = \frac{x}{r} \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r} \left(-\frac{y}{r^2} \right) = \frac{1}{r},$$

и частные производные обратных функций $x = x(r, \vartheta)$ и $y = y(r, \vartheta)$ (прямоугольные координаты, выраженные с помощью полярных координат) равны:

$$x_r = \frac{x}{r}, \quad x_\vartheta = -y, \quad y_r = \frac{y}{r}, \quad y_\vartheta = x,$$

что впрочем легче было найти непосредственно путем дифференцирования из формул обратного преобразования $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$.

Для функционального определителя D принято символическое обозначение:

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)},$$

целесообразность которого мы сейчас увидим. Из формул:

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{D}, \quad x_\eta = -\frac{\xi_y}{D},$$

$$y_\xi = -\frac{\eta_x}{D}, \quad y_\eta = \frac{\xi_x}{D},$$

выражающих частные производные обратных функций, находим для функционального определителя функций $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$ по ξ и η выражение:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{D^2} = \frac{1}{D} = 1 : \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Функциональный определитель системы обратных функций равен обратной величине функционального определителя исходной системы.

Совершенно аналогично можно выразить и производные второго порядка обратных функций с помощью первых и вторых производных заданных функций. Нужно только продифференцировать еще раз предыдущие линейные уравнения, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций, по ξ и η ; при этом мы предполагаем, что заданные функции имеют непрерывные производные второго порядка. Таким образом мы получаем линейные уравнения, из которых легко найти искомые производные.

Чтобы вычислить например производные

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = g_{\xi\xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = h_{\xi\xi},$$

мы дифференцируем оба равенства:

$$\begin{aligned} 1 &= \xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi, \\ 0 &= \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi, \end{aligned}$$

еще раз по ξ и получаем на основании правила дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{xx} x_\xi^2 + 2\xi_{xy} x_\xi y_\xi + \xi_{yy} y_\xi^2 + \xi_x x_{\xi\xi} + \xi_y y_{\xi\xi}, \\ 0 &= \eta_{xx} x_\xi^2 + 2\eta_{xy} x_\xi y_\xi + \eta_{yy} y_\xi^2 + \eta_x x_{\xi\xi} + \eta_y y_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Решая эту линейную относительно $x_{\xi\xi}$ и $y_{\xi\xi}$ систему (определитель ее опять равен D и по условию отличен от нуля) и подставляя вместо x_ξ и y_ξ ранее найденные значения, после небольших вычислений получаем для производных $x_{\xi\xi}$ и $y_{\xi\xi}$ выражения:

$$x_{\xi\xi} = -\frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} \xi_{xx} \eta_y^2 - 2\xi_{xy} \eta_x \eta_y + \xi_{yy} \eta_x^2 & \xi_y \\ \eta_{xx} \eta_y^2 - 2\eta_{xy} \eta_x \eta_y + \eta_{yy} \eta_x^2 & \eta_y \end{vmatrix}$$

и

$$y_{\xi\xi} = \frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} \xi_{xx} \eta_y^2 - 2\xi_{xy} \eta_x \eta_y + \xi_{yy} \eta_x^2 & \xi_x \\ \eta_{xx} \eta_y^2 - 2\eta_{xy} \eta_x \eta_y + \eta_{yy} \eta_x^2 & \eta_x \end{vmatrix}.$$

Мы можем найти также тем же методом и производные третьего и более высокого порядка путем дальнейшего дифференцирования наших линейных уравнений, причем каждый раз получаем системы линейных уравнений с (необращающимся в нуль) определителем D .

5. Разложение и умножение преобразований. В главе I мы видели, что каждое аффинное преобразование плоскости мы можем разложить на простые или, как мы говорили, примитивные преобразования, из которых первое вызывает искажение плоскости только в одном направлении, а второе вызывает искажение деформированной плоскости еще в другом направлении. При каждом из этих преобразований в действительности вводится только одна новая переменная.

Того же можно достигнуть и в общем случае преобразований. Сделаем предварительно несколько замечаний относительно умножения преобразований. Если переменная точка (x, y) области G одно-однозначно отображается с помощью преобразования

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

в точку (ξ, η) области Γ в плоскости ξ, η и если далее эта область Γ в свою очередь одно-однозначно отображается с помощью преобразования

$$u = \Phi(\xi, \eta), \quad v = \Psi(\xi, \eta),$$

на область B плоскости u, v , то тем самым получается отображение области G на область B , которое мы назовем произведением данных двух преобразований, или результирующим преобразованием. Это преобразование выражается формулами:

$$u = \Phi[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \quad v = \Psi[\varphi(x, y), \psi(x, y)];$$

как следует из его определения, оно также является одно-однозначным преобразованием.

Согласно правилу дифференцирования сложных функций мы получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi_{\xi} \varphi_x + \Phi_{\eta} \psi_x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_{\xi} \varphi_y + \Phi_{\eta} \psi_y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Psi_{\xi} \varphi_x + \Psi_{\eta} \psi_x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \Psi_{\xi} \varphi_y + \Psi_{\eta} \psi_y;$$

поэтому функциональный определитель u и v по x и y равен на основании теоремы об умножении определителей (стр. 37):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = (\Phi_{\xi} \Psi_{\eta} - \Phi_{\eta} \Psi_{\xi})(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x),$$

т. е. функциональный определитель результирующего преобразования равен произведению функциональных определителей составляющих преобразований, или, пользуясь нашим символическим обозначением:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Эта запись обнаруживает целесообразность нашего символического обозначения.

Функциональные определители играют такую же роль при умножении преобразований, как производные при образовании функции от функции одного независимого переменного.

Функциональный определитель результирующего преобразования нигде не обращается в нуль, если нигде не обращаются в нуль функциональные определители составляющих преобразований.

Если в частности второе преобразование

$$u = \Phi(\xi, \eta), \quad v = \Psi(\xi, \eta)$$

является преобразованием обратным первому

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

и если оба преобразования дифференцируемы, то результирующее преобразование является тождественным преобразованием $u = x$, $v = y$; функциональный определитель этого преобразования очевидно равен единице, и мы снова получаем выведенное нами на стр. 124 соотношение:

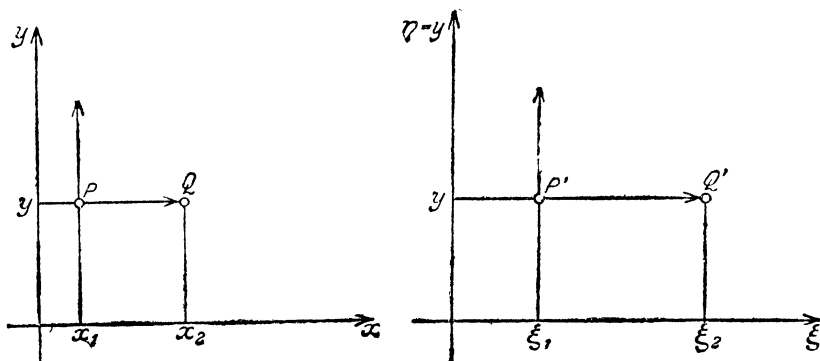
$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = 1,$$

из которого, между прочим, следует, что ни один из функциональных определителей не должен равняться нулю.

Прежде чем перейти к поставленному вначале вопросу о разложении произвольного преобразования на примитивные преобразования, рассмотрим следующее примитивное преобразование:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = y;$$

при этом примем, что определитель этого преобразования $D = \varphi_x$ отличен от нуля во всей области G ; пусть например $\varphi_x > 0$ во всей области.



Черт. 36. Отображение, не изменяющее направление вращения.

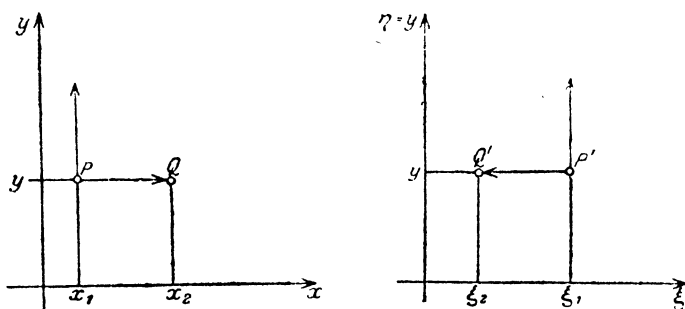
Тогда нашим преобразованием область G преобразовывается в область Γ , и мы можем представлять себе эту деформацию таким образом, что при этом каждая точка сдвигается по прямой, параллельной оси x ; все точки с одной и той же ординатой y имеют после преобразования такую же ординату η . Новая абсцисса ξ , которую после смещения имеет точка (x, y) , зависит как от x , так и от y . Условие $\varphi_x > 0$ означает, что при постоянном y значение ξ монотонно возрастает вместе с x ; это условие гарантирует однозначность соответствия между точками прямой $y = \text{const}$ до и после преобразования; а именно две точки $P(x_1, y)$ и $Q(x_2, y)$, имеющие ту же ординату y и $x_2 > x_1$, переходят в точки P' и Q' , имеющие опять равные ординаты η , и абсциссы которых удовлетворяют соответствующему неравенству $\xi_2 > \xi_1$ (черт. 36). Отсюда следует также, что при нашем преобразовании направление вращения не изменяется.

Если бы φ_x было меньше нуля, то нашим двум точкам соответствовали бы две точки с равными ординатами и абсциссами ξ_1 и ξ_2 , причем в данном случае $\xi_1 > \xi_2$ (черт. 37); следовательно направление вращения изменилось бы подобно тому, как мы это видели в главе I на простом примере аффинного преобразования с отрицательным определителем.

Всякое непрерывно дифференцируемое примитивное преобразование

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = y$$

с необращающимся в нуль определителем φ_x можно однозначно обратить с помощью такого же преобразования.



Черт. 37. Отображение, изменяющее направление вращения.

В самом деле, на основании теоремы о неявных функциях § 1, п° 3 мы можем в силу условия $\varphi_x \neq 0$ определить из уравнения $\xi - \varphi(x, y) = 0$ величину x как непрерывно дифференцируемую функцию $x = g(\xi, y)$ от ξ и y и притом однозначно. Формулы

$$x = g(\xi, \eta), \quad y = \eta$$

непосредственно дают обратное преобразование, определитель которого

$$g_\xi = \frac{1}{\varphi_x} \neq 0.$$

Теперь представим себе, что область Γ плоскости ξ, η отображается в свою очередь с помощью примитивного преобразования

$$u = \xi, \quad v = \Psi(\xi, \eta)$$

на область B плоскости u, v , причем мы предполагаем, что $\Psi_\eta > 0$. В таком случае дело обстоит совершенно аналогично тому, как и раньше, только искажение происходит теперь в направлении другой оси. Подобным же образом направление вращения не изменяется при отображении плоскости ξ, η на плоскость u, v (оно изменилось бы на обратное, если бы вместо предполагаемого соотношения $\Psi_\eta > 0$ имело место соотношение $\Psi_\eta \leq 0$). С помощью наших преобразований мы составляем преобразования:

$$u = \varphi(x, y), \\ v = \Psi[\varphi(x, y), y] = \phi(x, y).$$

Предыдущая теорема о функциональном определителе непосредственно приводит нас к соотношению:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \varphi_x \psi_y.$$

Теперь я утверждаю, что любое одно-однозначное непрерывно дифференцируемое преобразование

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y),$$

отображающее область G плоскости x, y на область B плоскости u, v , можно в окрестности любой точки внутри области G разложить на примитивные непрерывно дифференцируемые преобразования, если только во всей области G функциональный определитель

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y$$

отличен от нуля.

Из того, что функциональный определитель не обращается в нуль, следует, что ни в одной точке φ_x и φ_y не могут одновременно обратиться в нуль. Рассмотрим определенную точку с координатами x_0 и y_0 и допустим сперва, что в этой точке φ_x не равняется нулю. Тогда на основании основной теоремы § 1, п° 5 мы можем ограничить вокруг этой точки некоторую окрестность, например квадрат или прямоугольник, так чтобы внутри этой окрестности уравнение $u = \varphi(x, y)$ было однозначно разрешимо относительно x и определяло бы $x = g(u, y)$ как непрерывную и дифференцируемую функцию от u и y . Представим себе, что мы это выражение $x = g(u, y)$ подставляем в функцию $v = \psi(x, y)$, тогда

$$v = \psi[g(u, y), y] = \Psi(u, y).$$

Следовательно в окрестности точки (x_0, y_0) мы можем рассматривать наше преобразование как составленное из двух примитивных преобразований:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = y$$

и

$$u = \xi, \quad v = \Psi(\xi, \eta).$$

Подобным же образом мы можем в окрестности точки (x_0, y_0) , в которой $\psi_y \neq 0$, разложить данное преобразование на два примитивных преобразования вида:

$$\xi = x, \quad \eta = \psi(x, y),$$

и

$$u = \Phi(\xi, \eta), \quad v = \eta.$$

В силу этого мы не можем, правда, ожидать, что возможно одно и то же разложение данного преобразования на примитивные преобразования для всей области G , но так как разложение одного из двух указанных видов можно выполнить в окрестности любой внутренней точки области G^1 ,

¹⁾ Если в какой-либо точке обращаются в нуль одновременно φ_x и ψ_y , то нам нужно только еще поменять ролями u и v (см. примеч. на стр. 33).

то область G или во всяком случае каждую замкнутую область, лежащую целиком внутри области G , можно разбить на конечное число замкнутых областей¹⁾ так, что в каждой из них имеет место разложение преобразования на примитивные.

Из возможности такого разложения мы выведем интересное заключение. Мы видели, что при примитивном преобразовании направление вращения меняется или остается неизменным, смотря по тому, будет ли функциональный определитель отрицательным или положительным. Отсюда следует, что и в случае общего преобразования направление вращения изменяется или не изменяется, смотря по тому имеет ли функциональный определитель отрицательное или положительное значение. В самом деле, если функциональный определитель преобразования имеет положительное значение, то функциональные определители примитивных преобразований будут или оба положительны, или оба отрицательны; в первом случае непосредственно очевидно, что направление вращения не изменяется, во втором случае это следует из того, что двукратное изменение направления вращения дает первоначальное направление. Если же функциональный определитель преобразования имеет отрицательное значение, то одно и только одно из примитивных преобразований имеет отрицательный функциональный определитель и потому изменяет направление вращения, а второе примитивное преобразование не изменяет его.

6. Общая теорема об обратимости преобразования. Возможность обращения преобразования основана на следующей общей теореме. Если в определенной точке (x_0, y_0) непрерывно дифференцируемые в окрестности этой точки функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ принимают значения u_0 и v_0 , т. е. $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$ и $v_0 = \psi(x_0, y_0)$, если кроме того в этой точке функциональный определитель $D = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x$ не равен нулю, то систему уравнений $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ можно однозначно обратить в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , т. е. существует однозначно определенная пара функций $x = g(u, v)$ и $y = h(u, v)$ такого рода, что $x_0 = g(u_0, v_0)$ и $y_0 = h(u_0, v_0)$ и в окрестности точки (u_0, v_0) имеют место равенства:

$$u = \varphi[g(u, v), h(u, v)] \text{ и } v = \psi[g(u, v), h(u, v)].$$

Обратные функции $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ имеют в окрестности точки (u_0, v_0) непрерывные частные производные, которые можно представить выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Доказательство следует из рассуждений п^о 5.

¹⁾ Это следует из теоремы о покрытии (стр. 89).

В самом деле, мы можем в соответственном образом выбранной окрестности нашей точки (x_0, y_0) разложить наше преобразование $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ на непрерывно дифференцируемые примитивные преобразования; каждое из этих примитивных преобразований можно однозначным образом обратить с помощью непрерывно дифференцируемого примитивного преобразования, и преобразование, составленное из этих обратных преобразований, и является преобразованием, обратным данному. Так как оно составлено из двух непрерывно дифференцируемых преобразований, то оно в свою очередь непрерывно дифференцируемо. Справедливость указанных формул дифференцирования была доказана в п° 4.

Наша теорема об обращении является частным случаем следующей более общей теоремы. Если $\varphi(x, y, u, v)$ и $\psi(x, y, u, v)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от x, y, u и v и если уравнения

$$\varphi(x, y, u, v) = 0 \text{ и } \psi(x, y, u, v) = 0$$

удовлетворяются при некоторой системе значений x_0, y_0, u_0, v_0 и если далее для этой системы значений функциональный определитель от φ и ψ по x и y , т.е. $D = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x$ не равен нулю, то в окрестности этой точки можно однозначно решить уравнения $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ относительно x и y , и x и y представляют непрерывно дифференцируемые функции от u и v . Производные этих функций по u и v определяются по правилу дифференцирования сложной функции из линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_x x_u + \varphi_y y_u + \varphi_u &= 0 & \varphi_x x_v + \varphi_y y_v + \varphi_v &= 0 \\ \psi_x x_u + \psi_y y_u + \psi_u &= 0 & \psi_x x_v + \psi_y y_v + \psi_v &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство этой общей теоремы об обращении ведется тем же путем, что и доказательство частного случая. Из условия $D \neq 0$ мы можем, не нарушая общности, заключить, что в соответствующей точке значение φ_x например не равно нулю. Тогда на основании общей теоремы о неявных функциях уравнение $\varphi(x, y, u, v) = 0$ однозначно определяет в некоторой окрестности непрерывно дифференцируемую функцию $x = g(u, v, y)$ от u, v и y с производной $g_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_x}$. Подставив эту функцию $x = g(u, v, y)$ в функцию $\psi(x, y, u, v)$, мы получим $\psi(x, y, u, v) = \Psi(u, v, y)$ и

$$\Psi_y = -\frac{\varphi_x \varphi_y}{\varphi_x^2} + \psi_y = \frac{D}{\varphi_x}.$$

Так как $D \neq 0$, то производная Ψ_y не равна нулю; поэтому уравнение $\Psi = 0$ однозначно определяет y как непрерывно дифференцируемую функцию от u и v ; если подставим эту функцию в $x = g(u, v, y)$, то получим x как непрерывно дифференцируемую функцию от u и v .

7. Зависимые функции. Если функциональный определитель D обращается в нуль в некоторой точке (x_0, y_0) , то нельзя высказать никаких общих утверждений относительно разрешимости или неразрешимости урав-

нений в окрестности этой точки. Однако обратные функции, если они существуют, не могут быть дифференцируемыми функциями, так как в противном случае произведение $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ должно было бы равняться нулю, между тем как на основании сказанного на стр. 124 это произведение должно равняться единице. Например уравнения

$$u = x^3, \quad v = y$$

можно однозначно разрешить с помощью обратных функций

$$x = \sqrt[3]{u}, \quad y = v,$$

несмотря на то, что функциональный определитель в начале координат обращается в нуль. Но функция $\sqrt[3]{u}$ при $u=0$ не дифференцируема.

Наоборот, уравнения

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{и} \quad v = 2xy$$

в окрестности начала координат не могут иметь однозначного решения; это непосредственно следует из того, что двум различным точкам (x, y) и $(-x, -y)$ плоскости x, y соответствует одна и та же точка плоскости u, v .

Если функциональный определитель обращается в нуль тождественно, т. е. если он равен нулю не только в одной точке (x, y) , а в каждой точке некоторой ее окрестности, то мы имеем дело с так называемым несобственным преобразованием. В этом случае говорят, что функции $u = \varphi(x, y)$ и $v = \psi(x, y)$ зависимы. Рассмотрим сперва почти тривиальный частный случай, когда повсюду в соответствующей окрестности имеют место равенства $\varphi_x = 0$ и $\varphi_y = 0$ и функция $\varphi(x, y)$ является следовательно постоянной. Тогда мы видим, что в то время как точка (x, y) пробегает все точки некоторой (двумерной) области, ее изображение — точка (u, v) — остается всегда на прямой $u = \text{const}$; следовательно область уже не отображается на область, а на отрезок прямой линии, и конечно в данном случае не может быть и речи об обратимом отображении двух двумерных областей друг на друга. Подобным же образом обстоит дело и в общем случае, когда по крайней мере одна из двух частных производных φ_x и φ_y не равна тождественно нулю, а D равняется нулю тождественно. Допустим например, что в точке (x_0, y_0) рассматриваемой области производная $\varphi_x \neq 0$, тогда мы можем разложить наше преобразование на два примитивных преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = y$ и $u = \xi$, $v = \Psi(\xi, \eta)$ совершенно так же, как это было сделано в п^о 5, так как мы там пользовались только допущением $\varphi_x \neq 0$; так как $D = \varphi_x \Psi_\eta = 0$, то в окрестности точки (x_0, y_0) , в которой φ_x не обращается в нуль, производная Ψ_η должна тождественно равняться нулю, т. е. функция $\Psi = v$ совсем не зависит от η и таким образом является функцией только от $\xi = u$. Итак получаем следующий результат: если функциональный определитель равен нулю тождественно, то двумерная область в плоскости x, y безусловно не может отобразиться на двумерную область в плоскости u, v , а отображается в виде кривой, так как каждому значению u

в известном интервале соответствует только одно значение v . Очевидно, что рассмотренный ранее исключительный случай также можно включить сюда. Соответствующая кривая в этом случае есть просто прямая $u = \text{const}$, параллельная оси v .

В качестве примера несобственного преобразования рассмотрим преобразование

$$\xi = x + y, \quad \eta = (x + y)^2.$$

Здесь все точки плоскости x, y переходят в точки параболы $\eta = \xi^2$ плоскости ξ, η . Относительно обращения преобразования не приходится и думать, так как все точки прямой $x + y = \text{const}$ отображаются на одну и ту же точку (ξ, η) . Легко проверить, что значение функционального определителя равно нулю.

Заключительное замечание. Мы видим, что общее преобразование ведет себя подобно аффинному преобразованию и что функциональный определитель играет здесь такую же роль, как определитель аффинного преобразования. Следующее замечание дает нам возможность лучше выяснить это обстоятельство. Представим себе, что функции

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \psi(x, y)$$

представлены в окрестности точки (x_0, y_0) в виде:

$$\begin{aligned} \xi - \xi_0 &= (x - x_0) \varphi_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \varphi_y(x_0, y_0) + \varepsilon \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \eta - \eta_0 &= (x - x_0) \psi_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \psi_y(x_0, y_0) + \delta \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

где ε и δ стремятся к нулю, когда $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ стремится к нулю.

Функции можно представить в таком виде, так как они по условию дифференцируемы. Теперь ясно, что при достаточно малых значениях $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ наше преобразование можно в первом приближении рассматривать как аффинное, а именно заменить его аффинным преобразованием:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + (x - x_0) \varphi_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \varphi_y(x_0, y_0), \\ \eta &= \eta_0 + (x - x_0) \psi_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \psi_y(x_0, y_0), \end{aligned}$$

определитель которого и есть наш функциональный определитель.

Обобщение наших рассуждений на случай трех и большего числа переменных не представляет никаких затруднений.

§ 4. Приложения.

Теория поверхностей. При изучении кривых мы видели, что во многих случаях удобнее пользоваться параметрическим выражением кривой. Подобно этому при рассмотрении поверхностей часто наиболее удобным оказывается параметрическое выражение поверхности. В данном случае нужны уже два параметра; обозначим их через u и v . Такое параметрическое выражение имеет вид:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

причем φ, ψ и χ — данные функции от параметров u и v , а точка (u, v) пробегает данную область G в плоскости u, v . Соответствующая точка

с тремя прямоугольными координатами x, y, z описывает при этом некоторую фигуру в трехмерном пространстве x, y, z ; эта фигура, вообще говоря, является поверхностью. В самом деле мы можем попытаться определить из каких-нибудь двух из трех данных уравнений u и v как функции соответствующих прямоугольных координат; если подставим найденные выражения в третье уравнение, то получим уравнение поверхности в несимметричной форме, например в виде $z = f(x, y)$ ¹⁾. Для того чтобы иметь уверенность в том, что наши уравнения действительно представляют поверхность, нам достаточно только предположить, что не все три функциональных определителя

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль одновременно в тех же самых точках или, выражая это требование одним неравенством, что

$$(\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u)^2 + (\psi_u \chi_v - \psi_v \chi_u)^2 + (\chi_u \varphi_v - \chi_v \varphi_u)^2 > 0.$$

Тогда мы действительно всегда можем в окрестности любой точки пространства, выражаемой тремя предыдущими уравнениями, определить одну из трех координат как однозначную функцию двух остальных координат.

Простейшим примером такого параметрического выражения является выражение шаровой поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ радиуса r с помощью уравнений:

$$x = r \cos u \sin v, \quad y = r \sin u \sin v, \quad z = r \cos v$$

$$(0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi),$$

где $v = \vartheta$ есть полярный угол, а $u = \varphi$ есть географическая долгота точки на поверхности шара (§ 3, п° 3).

На этом примере мы видим одно преимущество параметрического выражения: координаты даны как явные функции от u и v , и притом мы имеем дело с однозначными функциями. Если v изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до π , то мы получаем нижнюю половину шаровой поверхности, т. е. $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, а меньшие значения v дают верхнюю половину шаровой поверхности. Поэтому при параметрическом представлении нам не приходится уже рассматривать отдельно две „однозначных ветви функции“, для того чтобы получить всю поверхность шара, как это имело место для выражения $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Другое параметрическое выражение шаровой поверхности мы получаем с помощью так называемой стереографической проекции. Для того чтобы стереографически спроектировать шаровую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ на плоскость $z = 0$, „плоскости экватора“ из „северного полюса“ $N(0, 0, r)$, мы соединяем прямой линией точку на поверхности шара с полюсом N и называем точку пересечения этой прямой с плоскостью экватора стереографическим изображением соответствующей

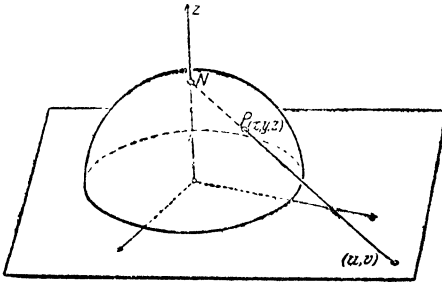
¹⁾ Впрочем параметрическое выражение содержит в себе это выражение $z = f(x, y)$ как частный случай, что легко видеть, полагая $x = u, y = v$.

щей точки на поверхности шара (черт. 38). Таким образом между точками шаровой поверхности (за исключением полюса N) и точками плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие.

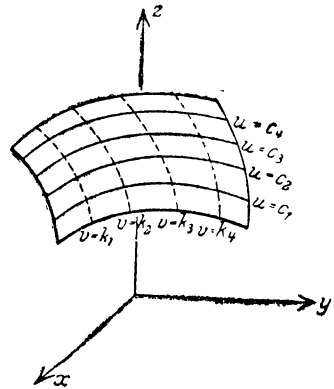
Если обозначить через u и v прямоугольные координаты точки, являющейся изображением, то это соответствие аналитически выражается формулами:

$$x = \frac{2r^2 u}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad y = \frac{2r^2 v}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad z = \frac{(u^2 + v^2 - r^2)r}{u^2 + v^2 + r^2},$$

которые нетрудно вывести при помощи элементарной геометрии. Эти формулы, очевидно, можно рассматривать как параметрическое выражение поверхности шара; параметры u и v как раз и являются прямоугольными координатами в плоскости u, v .



Черт. 38. Стереографическая проекция.



Черт. 39. Параметрические линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$.

Вообще мы можем параметрическое выражение поверхности рассматривать как отображение области G в плоскости u, v на соответствующую часть поверхности, причем, как всегда, под отображением мы разумеем точечное соответствие. Каждой точке рассматриваемой области в плоскости u, v соответствует одна точка поверхности, и, вообще говоря, имеет место и обратное утверждение¹⁾.

Подобным же образом кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$ в плоскости u, v соответствует некоторая кривая на поверхности, так как

$$x = \varphi[u(t), v(t)] = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

В частности при параметрическом выражении шаровой поверхности в полярных координатах меридианы выражаются просто уравнением $u = \text{const}$, а параллельные круги — уравнением $v = \text{const}$. Этой сети кривых соответствуют следовательно в плоскости u, v прямые, параллельные осям.

Рассмотрение кривой, лежащей на данной поверхности, является одним из важнейших средств для более глубокого исследования свойств этой поверхности. Я ограничусь здесь тем, что укажу выражение для длины дуги s

¹⁾ Отдельным точкам поверхности могут конечно соответствовать целые отрезки кривых в плоскости u, v , например полюсам шара при выражении в полярных координатах (стр. 134) соответствуют отрезки прямых $v = 0$ и $v = \pi$.

такой кривой на поверхности. Как уже было упомянуто в главе II, § 7, п° 2, имеем:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Так как имеют место равенства:

$$\frac{dx}{dt} = x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = y_u \frac{du}{dt} + y_v \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = z_u \frac{du}{dt} + z_v \frac{dv}{dt},$$

то справедлива формула:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

причем для сокращения введены так называемые гауссовы коэффициенты:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Эти величины не зависят от выбора кривой на поверхности, а только от самой поверхности и от ее выражения в параметрической форме. Предуказанное выражение производной от длины дуги по параметру обычно символически характеризуют, опуская указание на параметр тем, что говорят о линейном элементе на поверхности, который задается квадратичным дифференциальным выражением:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Для направляющих косинусов касательной к кривой на поверхности, выражаемой уравнениями $u = g(t)$, $v = h(t)$, мы получаем с помощью правила дифференцирования сложной функции выражения:

$$\cos \alpha \quad \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{x_u u' + x_v v'}{\sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y_u u' + y_v v'}{\sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z_u u' + z_v v'}{\sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}};$$

при этом мы для сокращения записи полагаем

$$\frac{dg(t)}{dt} = u', \quad \frac{dh(t)}{dt} = v'.$$

Рассмотрим еще на поверхности вторую кривую $u = g_1(t)$, $v = h_1(t)$ с направляющими косинусами $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ и $\cos \gamma_1$ и для краткости положим

$$\frac{dg_1(t)}{dt} = \dot{u}, \quad \frac{dh_1(t)}{dt} = \dot{v};$$

тогда косинус угла между этими кривыми определяется как косинус угла между их касательными, т. е.

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 = \\ &= \frac{E\dot{u}u' + F(\dot{u}v' + u'\dot{v}) + G\dot{v}v'}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}v' + G\dot{v}^2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}}, \end{aligned}$$

причем для всех величин, стоящих справа, надо подставить значения их в точке пересечения обеих кривых.

В частности мы можем рассмотреть на поверхности те кривые, которые задаются уравнением вида $u = \text{const}$ или $v = \text{const}$. Подставляя в наше параметрическое выражение поверхности вместо u определенное постоянное значение $u = \text{const}$, мы получаем лежащую на поверхности пространственную кривую, которая выражается с помощью параметра v . Аналогично получаем кривую, когда даем v постоянное значение, а u изменяем. Эти кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ являются параметрическими кривыми на поверхности, о которых мы уже упоминали раньше. Сеть этих параметрических кривых соответствует сети прямых, параллельных осям в плоскости u, v .

Можно рассматривать отображение двух плоских областей друг на друга как частный случай, заключающийся в предыдущем, а именно: если третья из наших функций $\chi(u, v)$ при всех рассматриваемых значениях u и v равна нулю, то точка (x, y, z) опишет некоторую область в плоскости x, y , в то время, когда точка (u, v) пробегает свою заданную область. Наши уравнения представляют просто отображение плоской области u, v на область в плоскости x, y , и они же определяют криволинейную систему координат в плоской области u, v ; подобным же образом обратные функции определяют в плоской области x, y криволинейную систему координат u, v . Линейный элемент в плоскости x, y с криволинейными координатами u и v имеет вид:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где в данном случае

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

§ 5. Семейства кривых, семейства поверхностей и их огибающие.

1. Общие замечания. Нам уже в различных случаях приходилось рассматривать кривые (или поверхности) не как единичные фигуры, а как члены некоторого семейства кривых (или семейства поверхностей), например кривые $f(x, y) = c$, где каждому значению постоянной c соответствует другая кривая. Так, все параллели к оси y в плоскости x, y , т. е. прямые $x = c$, образуют семейство. Таким же образом семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = c^2$ с центром в начале координат представляет семейство кривых: каждому значению c соответствует одна окружность этого семейства, именно окружность радиуса c . Равносторонние гиперболы $xy = c$ также представляют семейство кривых, которое изображено на черт. 26 (стр. 100). Частное значение $c = 0$ характеризует выродившуюся гиперболу, состоящую из обеих координатных осей. Примером семейства кривых является далее совокупность всех нормалей к кривой. Если кривая представлена с помощью параметра t в виде $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$, то уравнение семейства нормалей имеет вид:

$$[x - \varphi(t)] \varphi'(t) + [y - \psi(t)] \psi'(t) = 0,$$

причем здесь параметр семейства вместо прежнего c обозначен через t .

Общее понятие семейства кривых мы можем аналитически формулировать следующим образом. Пусть

$$f(x, y, c)$$

непрерывно дифференцируемая функция от обеих независимых переменных x и y и от параметра c , изменяющегося в некотором заданном интервале (параметр c следовательно является третьей независимой переменной, которая только иначе названа, потому что она в наших рассуждениях играет другую роль, чем x и y). Если уравнение

$$f(x, y, c) = 0$$

представляет при каждом постоянном значении c кривую, то совокупность этих кривых, которая получается, если c пробегает все значения из данного интервала, образует семейство кривых, зависящих от параметра c .

Кривые такого семейства могут быть заданы также в параметрической форме с помощью параметра t , относящегося к точкам кривой, в виде

$$x = \varphi(t, c), \quad y = \psi(t, c),$$

причем c опять является параметром семейства. Если дадим c определенное значение, то наши уравнения представляют кривую, выраженную с помощью параметра t . Например уравнения

$$x = c \cos t, \quad y = c \sin t$$

представляют рассмотренное раньше семейство концентрических окружностей; уравнения

$$x = ct, \quad y = \frac{1}{t}$$

представляют указанное выше семейство равносторонних гипербол.

В иных случаях приходится рассматривать такие семейства кривых, которые зависят не только от одного параметра c , а от большего числа параметров. Например совокупность всех окружностей в плоскости $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ представляет семейство кривых, зависящих от трех параметров a , b и c . Мы в дальнейшем будем под семейством кривых, если не будет особо оговорено, разуметь семейство, зависящее от одного параметра. В противном случае мы для отличия будем говорить о семействе кривых, зависящих от двух, трех и т. д. параметров.

Подобным же образом вводится понятие о семействах поверхностей в пространстве. Если дана непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y, z, c)$ и если уравнение

$$f(x, y, z, c) = 0$$

представляет при каждом постоянном значении параметра c в некотором интервале поверхность в пространстве с прямоугольными координатами x, y, z , то мы называем совокупность поверхностей, которая получается, когда c пробегает свой интервал, семейством поверхностей или точнее семейством поверхностей, зависящим от параметра c . Например концентрические шаровые поверхности с центром в начале координат $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ образуют такое семейство поверхностей. Как и в случае кривых, можно также рассматривать семейства поверхностей, зависящие от нескольких параметров. Так например плоскости, определяемые уравнением:

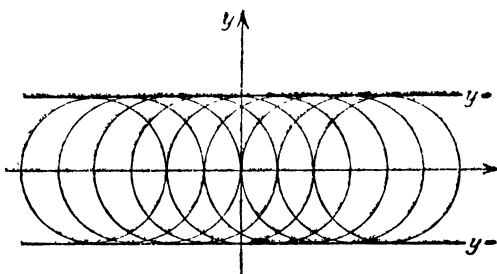
$$ax + by + \sqrt{1 - a^2 - b^2} z + 1 = 0,$$

образуют семейство поверхностей, зависящее от двух параметров a и b , если система значений a и b пробегает всю область $a^2 + b^2 \leq 1$. Это семейство поверхностей состоит из совокупности всех плоскостей, отстоящих от начала координат на расстоянии, равном единице.

2. Огибающая семейства кривых, зависящего от одного параметра. Если семейство прямых тождественно с совокупностью касательных к плоской кривой E (например семейство нормалей к кривой C совпадает с касательными к ее эволюте E (ср. т. I, стр. 264), то мы говорим, что семейство прямых огибается кривой E .

Подобным же образом мы говорим, что семейство окружностей радиуса 1, центры которых лежат на оси x , т. е. окружности, уравнения которых $(x-c)^2 + y^2 - 1 = 0$, огибаются прямыми $y = 1$ и $y = -1$, параллельными оси x , которые касаются всех окружностей семейства.

Точки касания огибающей к кривым семейства мы можем в этих примерах получить, если рассмотрим точку пересечения двух смежных кривых семейства, соответствующих значениям параметра c и $c+h$, и затем заставим h стремиться к нулю. Это кратко выражают так: эти огибающие представляют геометрическое место точек пересечения бесконечно близких кривых семейства.



Черт. 40. Семейство окружностей и его огибающая.

И у других семейств кривых может случиться, что существует кривая E , которая в каждой своей точке имеет касание с некоторой кривой семейства, изменяющейся с изменением этой точки; в таком случае кривая E называется огибающей (или оберткой) семейства кривых $f(x, y, c) = 0$. Начнем с наводящих соображений, принимая, что огибающая E действительно существует и что мы ее можем получить, как в приведенных выше примерах, как геометрическое место точек пересечения бесконечно близких кривых семейства¹⁾. В таком случае мы можем аналитически получить точку касания огибающей E с кривой $f(x, y, c) = 0$ следующим образом: наряду с этой кривой мы рассматриваем соседнюю кривую $f(x, y, c + h) = 0$, находим точку пересечения этих двух кривых и заставляем h стремиться к нулю, тогда точка пересечения должна стремиться к совпадению с искомой точкой касания. Для точки пересечения имеет место наряду с обоими уравнениями $f(x, y, c + h) = 0$ и $f(x, y, c) = 0$ также и уравнение

$$\frac{f(x, y, c + h) - f(x, y, c)}{h} = 0;$$

в последнем уравнении легко перейти к пределу при $h \rightarrow 0$. Так как мы предполагаем, что частная производная существует, то мы непосредственно получаем для точки касания кривой $f(x, y, c) = 0$ с огибающей два уравнения:

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{и} \quad f_c(x, y, c) = 0.$$

Если из этих уравнений мы можем выразить x и y как функции параметра c , то получается уравнение некоторой кривой в параметрической форме, и этому именно уравнению должна удовлетворять наша огибающая. Исключая параметр c , мы можем также представить ее в виде $g(x, y) = 0$. Это уравнение называется дискриминантным уравнением семейства.

Мы приходим таким образом к следующему правилу: чтобы получить огибающую семейства кривых $f(x, y, c) = 0$, надо рассматривать одновременно оба уравнения $f(x, y, c) = 0$ и $f_c(x, y, c) = 0$ и попытаться определить из них x и y как функцию от c или же исключить из них величину c .

Теперь мы наши наводящие соображения заменим более общим и полным рассуждением, которое будет исходить из собственного определения огибающей как кривой, касающейся всех кривых нашего семейства, при этом мы увидим, при каких условиях наше правило дает огибающую и какие возможности здесь вообще имеются.

Допустим сперва, что существует огибающая E , которая выражается при помощи параметра c двумя непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x = x(c), \quad y = y(c),$$

причем $\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \neq 0$, и что в точке, соответствующей некоторому значению параметра c , ее касается кривая семейства, соответствующая тому же значению параметра c . В точке касания удовлетворяется прежде всего

¹⁾ Так как последнее допущение, как обнаруживается на примерах, является слишком узким, мы сейчас дадим более общий вывод.

уравнение $f(x, y, c) = 0$; представим себе, что в это уравнение вместо x и y подставлены выражения $x(c)$ и $y(c)$, тогда уравнение имеет место при всех значениях c из соответствующего интервала. Дифференцируя это тождество по c , мы непосредственно получаем:

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} + f_c = 0.$$

Но требование, чтобы кривые в этой точке касались, выражается условием:

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} = 0,$$

так как $\frac{dx}{dc}$ и $\frac{dy}{dc}$ пропорциональны направляющим косинусам касательной к огибающей E , а f_x и f_y пропорциональны направляющим косинусам нормали к кривой семейства $f(x, y, c) = 0$. Таким образом для огибающей тотчас же вытекает условие $f_c = 0$, и мы видим следовательно, что наше предыдущее правило является необходимым условием существования огибающей.

Чтобы исследовать, в какой мере оно является достаточным, допустим, что кривая E , выражающаяся в параметрической форме при помощи непрерывно дифференцируемых функций $x = x(c)$ и $y = y(c)$, удовлетворяет обоим уравнениям $f(x, y, c) = 0$ и $f_c(x, y, c) = 0$. Представим себе, что опять в первое уравнение вместо x и y подставлены функции $x(c)$ и $y(c)$, тогда, дифференцируя по c и принимая во внимание второе уравнение $f_c = 0$,

тотчас же получаем соотношение $f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} = 0$, которое имеет место

для всех точек кривой E . Если в некоторой точке кривой E выражение $f_x^2 + f_y^2$ не равно нулю и следовательно в этой точке непременно существует определенная касательная к кривой семейства, то наше уравнение указывает, что кривая E и кривая семейства касаются друг друга в этой точке. Итак при этом добавочном допущении наше правило является и достаточным условием существования огибающей. Если однако f_x и f_y одновременно обращаются в нуль, то, как мы видели в § 2, п° 2, мы имеем дело, вообще говоря, с особенной точкой кривой семейства и никаких заключений о касании мы сделать не можем.

Во всяком случае после нахождения дискриминантной кривой необходимо еще особое исследование, является ли она действительно огибающей или нет.

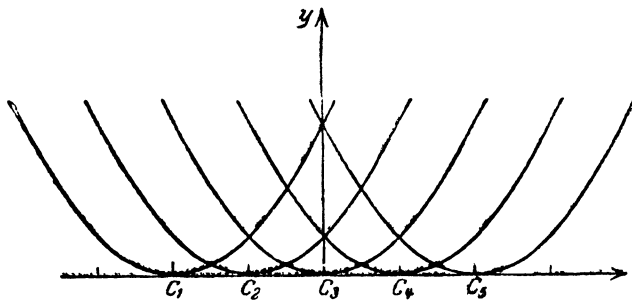
3. Примеры. 1. $(x - c)^2 + y^2 = 1$. Это уравнение представляет рассмотренное уже в п° 1 семейство окружностей радиуса, равного единице, центр которых перемещается по оси x . Геометрически ясно, что огибающая должна состоять из двух прямых $y = +1$ и $y = -1$. Этот результат можно подтвердить и при помощи нашего правила, так как оба уравнения $(x - c)^2 + y^2 = 1$ и $-2(x - c) = 0$ непосредственно дают огибающую в виде $y^2 = 1$.

2. Семейство окружностей радиуса 1, проходящих через начало координат (центры которых следовательно лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат), выражается уравнением:

$$(x - \cos c)^2 + (y - \sin c)^2 = 1$$

или

$$x^2 + y^2 - 2x \cos c - 2y \sin c = 0.$$

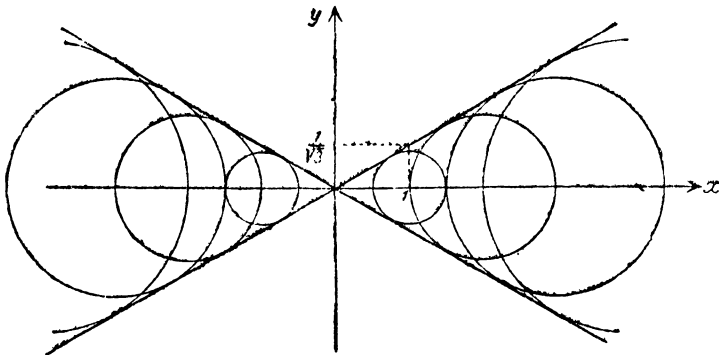


Черт. 41. Семейство парабол и его огибающая.

Приравнявая нулю производную по c , мы получаем:

$$x \sin c - y \cos c = 0.$$

Этим двум уравнениям удовлетворяют координаты начала $x=0$ и $y=0$. Если же $x^2 + y^2 \neq 0$, то из наших уравнений легко получить, что $\cos c = \frac{x}{2}$, $\sin c = \frac{y}{2}$, и следовательно, исключая c , имеем уравнение



Черт. 42. $(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$.

$x^2 + y^2 = 4$. Итак наше правило дает нам окружность радиуса 2 с центром в начале координат как огибающую, что геометрически очевидно, и кроме того начало координат как изолированную точку.

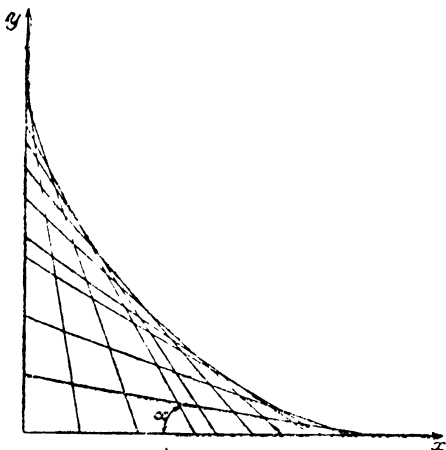
3. Семейство парабол $(x - c)^2 - 2y = 0$ также имеет огибающую, а именно ось x (черт. 41). Это непосредственно ясно геометрически и тотчас же получается из формул.

4. Рассмотрим семейство окружностей $(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$. Дифференцируя по c , получаем $2x - 3c = 0$ и, подставляя, получаем уравнение огибающей:

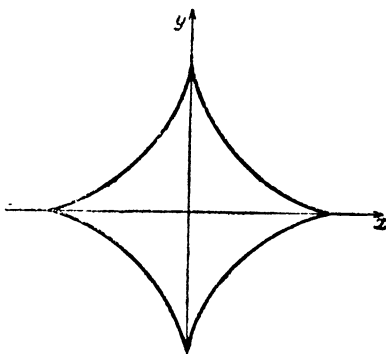
$$y^2 = \frac{x^2}{3},$$

т. е. огибающая состоит из двух прямых $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$. На-

чало координат представляет исключение в том смысле, что в нем не имеет места касание.



Черт. 43. Дуга астроида, как огибающая семейства прямых.



Черт. 44. Астроида.

5. Дальнейший пример представляет семейство прямых линий, на которых осями Ox и Oy отсекаются отрезки длины, равной единице. Разумея под $\alpha = c$ угол, отмеченный на черт. 43, мы можем представить эти прямые уравнением:

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = 1.$$

Условие огибания гласит:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} x - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} y = 0$$

и дает вместе с уравнением семейства прямых для огибающей выражение в параметрическом виде:

$$x = \cos^3 \alpha, \quad y = \sin^3 \alpha,$$

из которого далее получается уравнение:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Эта кривая называется астроидой. Она состоит (черт. 43, 44) из четырех симметрических ветвей с четырьмя точками заострения.

6. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ является также огибающей семейства эллипсов

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1,$$

у которых сумма полуосей c и $1-c$ равна 1 (черт. 45).

7. Что наше правило может в иных случаях и не давать огибающей, показывает пример семейства кривых $(x-c)^2 - y^3 = 0$. Наше правило дает в качестве решения ось x , которая является однако, как показывает черт. 46, не огибающей, а геометрическим местом точек заострения кривых семейства, и кривые не касаются этой оси.

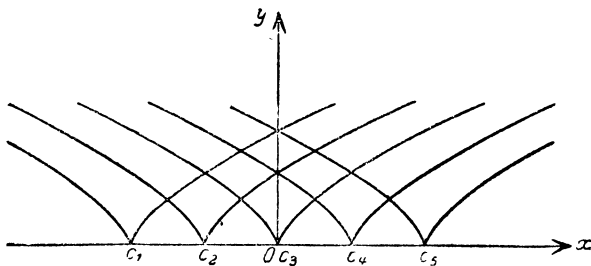
8. Для семейства

$$(x-c)^3 - y^2 = 0$$

мы также получаем в качестве дискриминантной кривой ось x (черт. 47). Она опять представляет геометрическое место точек заострения, но кривые касаются ее, и потому ее следует также считать огибающей.

9. Дальнейший пример, в котором дискриминантная кривая состоит как из огибающей, так из геометрического места узловых точек кривых, представляет семейство так называемых строфойд (черт. 48):

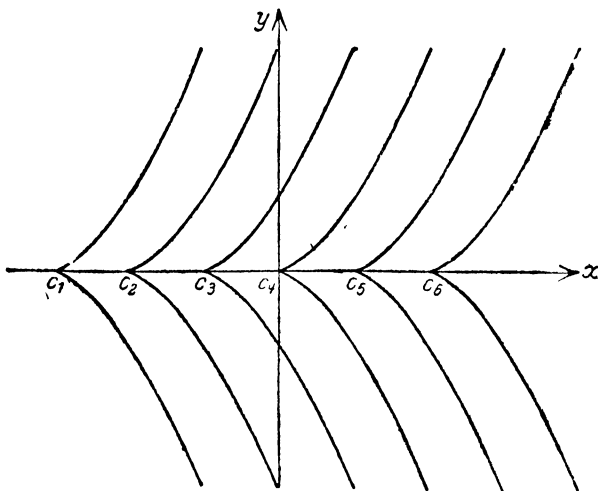
$$[x^2 + (y-c)^2](x-2) + x = 0$$



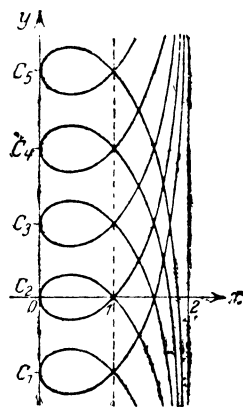
Черт. 46. $(x-c)^2 - y^3 = 0$.

Все кривые семейства конгруэнтны между собой и получаются одна из другой перемещением параллельно оси y . Путем дифференцирования получаем $f'_c = -2(y-c)(x-2) = 0$, т. е. или $x=2$ или $y=c$. Прямую $x=2$ рассматривать не приходится, так как при этом значении x ордината y не имеет конечного значения. Следовательно $y=c$, и уравнение дискриминантной кривой имеет вид $x^2(x-2) + x = 0$. Эта кривая распадается на прямую $x=0$ и прямую $x=1$. Как легко видеть на черт. 48, только первая прямая $x=0$ является огибающей, а прямая $x=1$ является носителем узловых точек строфойд.

10. Что огибающая может и не быть геометрическим местом точек пересечения бесконечно близких кривых семейств, обнаруживает пример семейства кубических парабол $y - (x - c)^3 = 0$, получающихся параллельным



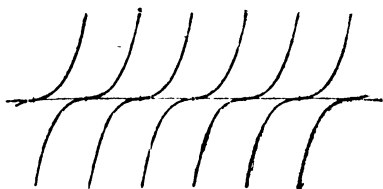
Черт. 47. $(x - c)^3 - y^2 = 0$



Черт. 48. Строфоиды.

перенесением, которые нигде между собой не пересекаются. Наше правило тотчас же дает уравнение $f_c = 3(x - c)^2 = 0$, и прямая $y = 0$ (ось x) является таким образом дискриминантной кривой. Так как эта прямая касается всех кривых семейства, то она является огибающей.

4. **Огибающая семейства поверхностей.** Совершенно аналогичным образом обстоит дело и при рассмотрении огибающей семейства поверхностей. Рассмотрим сперва семейство поверхностей $f(x, y, z, c) = 0$, зависящее от одного параметра c , который изменяется в некотором интервале. Огибающей этого семейства называется такая поверхность E , которая касается каждой из поверхностей семейства вдоль целой кривой, причем совокупность этих кривых, лежащих на огибающей поверхности E , образует семейство, зависящее от одного параметра, заполняющее всю эту огибающую поверхность. Примером может служить семейство всех шаровых поверхностей радиуса 1 с центрами на оси z . Непосредственно ясно, что цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 - 1 = 0$, радиус которой равен единице, а осью служит ось z , является огибающей; при этом семейство кривых, вдоль которых происходит касание, состоит просто из окружностей радиуса 1, плоскости которых параллельны плоскости x, y , а центры лежат на оси z ¹⁾.



Черт. 49. Семейство кубических парабол.

1) Огибающая поверхность семейства шаровых поверхностей постоянного радиуса с центрами, лежащими на некоторой кривой, называется трубчатой поверхностью.

Предварительное наводящее рассуждение для получения огибающей поверхности в предположении, что такая поверхность существует, вполне аналогично рассуждению в п° 2. Мы рассматриваем сперва две поверхности

$$f(x, y, z, c) = 0 \text{ и } f(x, y, z, c + h) = 0,$$

соответствующие двум различным значениям параметра c и $c + h$; эти два уравнения определяют линию пересечения обеих поверхностей, причем мы предполагаем, что такая линия пересечения действительно существует. Для точек этой линии пересечения одновременно с данными двумя уравнениями имеет место и любое уравнение, получающееся как линейная комбинация данных уравнений, в частности уравнение:

$$\frac{f(x, y, z, c + h) - f(x, y, z, c)}{h} = 0.$$

Если заставим h стремиться к нулю, то линия пересечения стремится к некоторому предельному положению, и кривая, получающаяся в пределе, определяется уравнениями:

$$f(x, y, z, c) = 0 \text{ и } f_c(x, y, z, c) = 0.$$

Эта предельная кривая, которую часто называют также линией пересечения двух бесконечно близких поверхностей семейства (название не вполне точное, но непосредственно понятное и наглядное) зависит еще от параметра c . Совокупность всех таких кривых для всевозможных различных значений c образует семейство пространственных кривых, зависящее от параметра c . Если исключим c из двух предыдущих уравнений, то получим дискриминантное уравнение. Совершенно таким же образом как в п° 2, мы можем показать, что огибающая поверхность во всяком случае удовлетворяет дискриминантному уравнению.

Таким же путем, как в случае семейства плоских кривых, можем убедиться в том, что касательная к дискриминантной поверхности является в то же время и касательной к соответствующей поверхности семейства, если только последняя не имеет там особой точки, т. е. во всяком случае если $f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \neq 0$. Итак дискриминантная поверхность опять достоин из огибающей семейства и из геометрического места особых точек поверхностей семейства.

В качестве примера рассмотрим прежде всего упомянутое уже семейство шаровых поверхностей

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - 1 = 0.$$

Чтобы найти огибающую, мы должны взять еще уравнение

$$-2(z - c) = 0.$$

При постоянном значении c эти два уравнения определяют указанную выше окружность радиуса, равного единице, лежащего в плоскости, параллельной плоскости x, y , на высоте $z = c$. Исключая из этих двух уравнений параметр c , получаем уравнение огибающей $x^2 + y^2 - 1 = 0$, т. е. уравнение поверхности круглого цилиндра, имеющего ось z , а основанием круг радиуса 1.

В то время как для семейства кривых имеет смысл говорить об огибающей лишь в том случае, когда семейство зависит только от одного параметра, можно в случае семейства поверхностей искать также и огибающую семейства поверхностей $f(x, y, z, c_1, c_2) = 0$, зависящего от двух параметров. Рассмотрим например семейство всех шаровых поверхностей радиуса, равного единице, центры которых лежат в плоскости x, y . Это семейство выражается уравнением:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Геометрическая интуиция непосредственно указывает нам, что обе плоскости $z = 1$ и $z = -1$ в каждой из своих точек касаются одной из поверхностей семейства. Вообще под огибающей семейства поверхностей, зависящего от двух параметров, разумеют такую поверхность E , каждая точка P которой является точкой касания поверхности E с одной из поверхностей семейства; притом должно быть выполнено следующее условие: точка (c_1, c_2) , где c_1 и c_2 — значения параметров той поверхности семейства, которая касается огибающей поверхности E в точке P , должна пробегать некоторую область в плоскости c_1, c_2 , когда точка P пробегает поверхность E , и различным точкам (c_1, c_2) должны соответствовать различные точки огибающей поверхности E . Следовательно в данном случае поверхность семейства касается огибающей, вообще говоря, только в одной точке, а не вдоль целой линии, как это было в предыдущем случае.

При допущениях, подобных ранее указанным, мы получаем для точки касания поверхности семейства с огибающей, если последняя существует, уравнения:

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad f_{c_1}(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad f_{c_2}(x, y, z, c_1, c_2) = 0.$$

Из этих трех уравнений мы можем, вообще говоря, вычислить координаты точки касания каждой отдельной поверхности, если дадим параметрам соответствующие значения. Обратно, исключая оба параметра c_1 и c_2 , мы получаем уравнение, которому во всяком случае удовлетворяют точки огибающей.

Например совокупность всех шаровых поверхностей радиуса 1 с центрами в плоскости x, y выражается уравнением

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 - 1 = 0,$$

в которое входят параметры c_1 и c_2 . Наше правило для получения огибающей дает нам еще два уравнения:

$$f_{c_1} = -2(x - c_1) = 0, \quad f_{c_2} = -2(y - c_2) = 0,$$

таким образом мы получаем в качестве дискриминантного уравнения $z^2 - 1 = 0$, и действительно, как мы видели, плоскости $z = 1$ и $z = -1$ являются огибающими.

§ 6. Наибольшие и наименьшие значения.

1. Необходимые условия. Одним из важнейших применений дифференциального исчисления и в случае функций многих независимых переменных является теория наибольших и наименьших значений

Рассмотрим сначала функцию $u = f(x, y)$ от двух независимых переменных x и y и представим себе поверхность в пространстве x, y, u , являющуюся геометрическим изображением этой функциональной зависимости. Тогда мы говорим, что эта функция имеет наибольшее значение, или максимум, в точке (x_0, y_0) , если все значения u для некоторой (всесторонней) окрестности точки P меньше значения $u_0 = f(x_0, y_0)$. Геометрически такому максимуму соответствует вершина на поверхности. Соответственно мы будем говорить, что функция имеет в точке (x_0, y_0) наименьшее значение, или минимум, если все значения функции в некоторой окрестности P_0 больше значения $u_0 = f(x_0, y_0)$. Как и в случае одного независимого переменного, эти оба понятия относятся только к некоторой достаточно малой окрестности данной точки; вся поверхность в целом может конечно содержать в себе точки, которые лежат выше вершин. Аналитически мы можем формулировать наше определение и для функций, зависящих от большего числа переменных, следующим образом: функция $u = f(x, y, \dots)$ имеет в точке (x_0, y_0, \dots) максимум, если она в некоторой окрестности этой точки имеет повсюду значения меньшие, чем в этой точке, и имеет минимум, если имеет повсюду в некоторой окрестности значения большие, чем в этой точке. Еще раз подчеркнем, что это определение относится к некоторой окрестности, которую надо соответствующим образом выбрать и которая окружает точку со всех сторон. Следовательно вполне может случиться, что в замкнутой области значение максимума будет меньше наибольшего значения, которое принимается функцией в этой области¹⁾. Если наибольшее значение принимается функцией в точке, лежащей на границе области, то совершенно аналогично случаю одной независимой переменной это значение ни в коем случае не обязано быть максимальным или минимальным значением в указанном нами смысле. Рассматривая например функцию $u = x + y$, которая определена во всей плоскости x, y , только в области квадрата $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, мы видим, что наименьшее значение нуль в этой замкнутой области функция принимает в начале координат. Но это наименьшее значение нуль не является минимальным. В самом деле, если будем рассматривать эту функцию во всесторонней окрестности начала координат, то заметим, что функция принимает и отрицательные значения, т. е. значения, меньшие нуля. С другой стороны, если нам известно, что наибольшее (или наименьшее) значение достигается функцией только в одной внутренней точке рассматриваемой области, то это значение непременно является максимальным (или минимальным) в смысле нашего определения.

Выведем сначала необходимые условия существования экстремального значения, т. е. условия, которые должны быть выполнены в точке (x_0, y_0, \dots) , если в этой точке функция принимает экстремальное значение (как и в случае одной независимой переменной, мы пользуемся термином экстремальное значение в том случае, когда нет надобности различать понятия максимального и минимального значения). Для суще-

¹⁾ Мы знаем, что в замкнутой области непрерывная функция всегда в некоторой точке принимает наибольшее, а в некоторой точке — наименьшее значение (см. стр. 88).

ствования максимума или минимума дифференцируемой функции $u=f(x, y, z, \dots)$ в точке P_0 с координатами (x_0, y_0, z_0, \dots) необходимо должны иметь место равенства:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0, \dots) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0, z_0, \dots) &= 0 \\ f_z(x_0, y_0, z_0, \dots) &= 0. \\ &\dots \end{aligned}$$

В самом деле эти условия непосредственно вытекают из известных условий для случая одной независимой переменной. Действительно, если представим себе например, что переменные y, z, \dots имеют постоянные значения $y=y_0, z=z_0, \dots$ и что наша функция в окрестности точки P_0 рассматривается только как функция от x , то эта функция от x должна в точке $x=x_0$ иметь экстремальное значение, следовательно на основании ранее полученных результатов необходимо $f_x(x_0, y_0, z_0, \dots)=0$.

Геометрически обращение в нуль частных производных означает в случае двух независимых переменных x и y , что касательная плоскость к поверхности $u=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) параллельна плоскости x, y .

В некоторых случаях удобнее записать формально эти условия в виде одного равенства:

$$df(x_0, y_0, z_0, \dots) = f_x(x_0, y_0, z_0, \dots)dx + f_y(x_0, y_0, z_0, \dots)dy + f_z(x_0, y_0, z_0, \dots)dz + \dots = 0,$$

которые можно выразить словами так: в точке экстремума дифференциал функции (линейная часть приращения) непременно должен равняться нулю, независимо от того, какие значения придать дифференциалам dx, dy, dz, \dots независимых переменных x, y, z, \dots .

Обратно, из справедливости предыдущего равенства для любых значений dx, dy, dz, \dots следует, что $f_x=f_y=\dots=0$ в соответствующей точке; чтобы в этом убедиться, достаточно приравнять все (не зависящие друг от друга) дифференциалы за исключением одного нулю.

В наших уравнениях:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0, \dots) &= 0, \\ f_y(x_0, y_0, z_0, \dots) &= 0, \\ f_z(x_0, y_0, z_0, \dots) &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

число неизвестных x_0, y_0, z_0, \dots равно числу уравнений. Поэтому из них, вообще говоря, можно определить точки, в которых достигаются экстремальные значения. Но никоим образом нельзя утверждать, что во всякой точке, координаты которой удовлетворяют данным уравнениям, функция принимает экстремальное значение. Рассмотрим например функцию $u=xy$. Наши условия тотчас же дают, что $x=0$ и $y=0$, но в окрестности этой точки $(0,0)$ функция принимает, смотря по тому, в какой четверти мы находимся, как положительные, так и отрицательные значения, следовательно значение функции в этой точке безусловно не является экстремальным. Гиперболический параболоид $u=xy$ (черт. 25, стр. 100) имеет в окрестности этой

точки седлообразную форму. Точка, в которой касательная плоскость пересекает поверхность, называется гиперболической точкой поверхности.

Для краткости речи мы будем характеризовать всякую точку (x_0, y_0, z_0, \dots) в которой $f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0, \dots$ или

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz + \dots = 0,$$

независимо от того, имеет ли функция в этой точке экстремальное значение или нет, говоря, что в этой точке функция $u = f(x, y, z, \dots)$ имеет стационарное значение.

Такие стационарные значения получаются, как видно из нашего предыдущего вывода, также в точках „максимума или минимума в более слабом смысле“. Под этим мы разумеем точку (x_0, y_0) , в окрестности которой функция $f(x, y)$ не больше или не меньше значения $f(x_0, y_0)$, но в то же время эта функция вдоль линии, проходящей через точку (x_0, y_0) , имеет значения, равные $f(x_0, y_0)$. Геометрически такие точки представляются точками касания горизонтальной касательной плоскости к поверхности $u = f(x, y)$ в том случае, когда касание имеет место не в одной точке, а вдоль целой линии, как например для цилиндрической поверхности $u = \sqrt{1 - y^2}$ вдоль линии

$$y = 0, \quad u = 1.$$

Во всяком случае для дифференцируемой функции всякая внутренняя точка замкнутой области, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение, является точкой стационарности.

Для того чтобы решить вопрос, дают ли системы значений, найденные из наших уравнений, экстремальное значение функции и когда это имеет место, требуется еще дальнейшее исследование. Во многих случаях однако положение дел ясно с самого начала, именно в тех случаях, когда известно, во-первых, что функция достигает наибольшего или наименьшего значения в некоторой внутренней точке P области и, во-вторых, что наши уравнения имеют единственную систему решений $x = x_0, y = y_0, \dots$. Тогда эта система значений непременно дает координаты точки P , так как в этой точке функция безусловно имеет стационарный характер. Если же мы не имеем возможности опираться на подобные соображения, то мы должны произвести дальнейшее исследование, которое мы приведем в дополнениях к этой главе. Поясним теперь наш результат на нескольких примерах.

2. Примеры. 1. Частные производные функции $u = x^2 + y^2$ обращаются в нуль только в начале координат, следовательно только в этой точке функция может иметь экстремальное значение. Действительно, в этой точке функция достигает минимума, так как $u = x^2 + y^2$ во всех точках (x, y) , отличных от точки $(0, 0)$, как сумма двух квадратов имеет положительное значение.

2. Функция

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x^2 + y^2 < 1)$$

имеет частные производные.

$$u_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad u_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

которые обращаются в нуль только в начале координат. Действительно в этой точке мы имеем экстремальное значение, а именно максимум; в самом деле, во всех точках (x, y) окрестности точки $(0, 0)$ подрадикальное выражение $1 - x^2 - y^2$ имеет меньшие значения, чем при $x = 0, y = 0$.

3. Требуется построить треугольник, для которого произведение синусов его углов принимает наибольшее значение, т. е. требуется найти те значения x и y , при которых достигает наибольшего значения функция

$$f(x, y) = \sin x \sin y \cdot \sin(x + y)$$

в области $0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi; 0 \leq x + y \leq \pi$. Так как функция внутри этой области положительна, то и наибольшее значение ее должно быть положительным. На границе области, т. е. там, где по крайней мере в одном из определяющих область неравенств имеет место знак равенства, $f(x, y) = 0$, следовательно функция принимает наибольшее значение во внутренней точке области.

Приравнявая частные производные нулю, получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) &= 0, \\ \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) &= 0. \end{aligned}$$

Из этих двух уравнений следует, что $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ или $x = y$, так как

$$0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \pi > x + y > 0.$$

Подставляя вместо y найденное значение в первое уравнение, получаем соотношение $\sin 3x = 0$. Поэтому $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{3}$ является единственной стационарной точкой внутри области. Следовательно искомый треугольник будет равносторонним.

4. Пусть три точки P_1, P_2, P_3 с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и (x_3, y_3) образуют остроугольный треугольник. Требуется найти четвертую точку P с координатами (x, y) , сумма расстояний которой от трех данных точек P_1, P_2, P_3 является наименьшей. Сумма расстояний некоторой точки от данных точек есть непрерывная функция от координат x и y этой точки, и эта функция непременно принимает в круге очень большого радиуса, заключающего внутри себя данный треугольник, наименьшее значение в некоторой точке P . Эта точка не может совпасть ни с одной из вершин треугольника, так как основание высоты, опущенной на сторону, прилегающую к вершине, представляет точку, сумма расстояний которой от трех вершин безусловно меньше. Подобным же образом точка P не может лежать на окружности круга, если только точки этой окружности достаточно удалены от вершин треугольника. Образует теперь при помощи расстояний

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

функцию

$$f(x, y) = r_1 + r_2 + r_3,$$

которая дифференцируема повсюду за исключением точек P_1, P_2 и P_3 ; мы знаем, что в точке P обращаются в нуль частные производные по x и y .

Путем дифференцирования функции $f(x, y)$ мы получаем следовательно соотношения, имеющие место в точке P ,

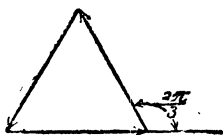
$$\frac{x-x_1}{r_1} + \frac{x-x_2}{r_2} + \frac{x-x_3}{r_3} = 0,$$

$$\frac{y-y_1}{r_1} + \frac{y-y_2}{r_2} + \frac{y-y_3}{r_3} = 0.$$

Три плоских вектора u_1, u_2, u_3 с координатами

$$\frac{x-x_1}{r_1}, \frac{y-y_1}{r_1}; \frac{x-x_2}{r_2}, \frac{y-y_2}{r_2}; \frac{x-x_3}{r_3}, \frac{y-y_3}{r_3},$$

каждый из которых имеет длину, равную единице, на основании наших равенств дают в сумме нуль, следовательно при геометрическом сложении этих векторов получаем равнобедренный треугольник, т. е. каждый вектор переходит в направление



Черт. 50.

следующего при повороте на угол $\frac{2}{3}\pi$. Так как наши три вектора по направлению совпадают соответственно с тремя векторами, идущими из точек P_1, P_2, P_3 в точку P , то все три стороны треугольника P_1, P_2, P_3 должны быть видны из искомой точки P под одним и тем же углом $\frac{2}{3}\pi$.

3. Относительные maxima и minima. Во многих случаях мы встречаемся с задачей нахождения наибольших и наименьших значений от функций многих переменных в форме, отличающейся от той, которую мы рассматривали. Если мы ищем например на некоторой поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ точку, ближайшую к началу координат, то нам приходится определить минимум функции

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

но при этом переменные x, y, z не являются независимыми, а связаны между собой уравнением поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ как добавочным условием. Такого рода задача о нахождении относительных maxima и minima, конечно не представляет для нас совершенно новой проблемы. Так в нашем примере достаточно только выразить одну из переменных, скажем z , из уравнения $\varphi(x, y, z) = 0$ через остальные и подставить это выражение в формулу для расстояния $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; тогда придется иметь дело с обыкновенной задачей о нахождении экстремальных значений для функции от двух независимых переменных x и y .

Однако удобнее и нагляднее записать условия экстремума в симметрической форме, при которой не отдается предпочтения ни одной из переменных.

Рассмотрим прежде всего в качестве простейшего, но типичного, примера следующую задачу: требуется найти для функции $f(x, y)$ от двух переменных x и y точки, в которых достигается

экстремальное значение, если x и y не являются независимыми переменными, а связаны условием:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Чтобы уяснить себе сперва вопрос геометрическим путем, допустим, что уравнение $\varphi(x, y) = 0$ изображается кривой, на которой нет особенных точек, и что кривые $f(x, y) = \text{const} = c$ покрывают часть плоскости, как это изображено на черт. 51. Речь идет о том, чтобы найти среди кривых этого семейства, пересекающих кривую $\varphi(x, y) = 0$, ту, для которой c имеет наибольшее или наименьшее значение. Пробегая точки кривой $\varphi = 0$, мы пересекаем кривые $f(x, y) = c$; при этом вообще говоря, c изменяется монотонно. Там, где направление пробега шкалы c изменяется, мы должны ждать экстремального значения. Из черт. 51 мы видим, что это имеет место для той кривой семейства, которая как раз касается кривой $\varphi = 0$. Координаты точки касания и будут искомыми значениями $x = \xi$ и $y = \eta$, при которых функция $f(x, y)$ принимает экстремальное значение. Касание означает, что обе кривые $f = \text{const}$ и $\varphi = 0$ имеют в этой точке общую касательную. Следовательно при $x = \xi$ и $y = \eta$ будет иметь место пропорция:

$$f_x : f_y = \varphi_x : \varphi_y,$$

или, если ввести множитель пропорциональности λ , будут удовлетворяться уравнения:

$$f_x + \lambda \varphi_x = 0,$$

$$f_y + \lambda \varphi_y = 0,$$

которые вместе с уравнением

$$\varphi(x, y) = 0$$

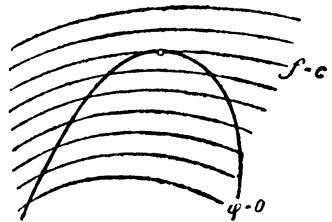
достаточны для определения координат ξ и η точки касания и множителя пропорциональности λ .

Это рассуждение может оказаться неприемлемым, если например в точке (ξ, η) встречи кривой $\varphi = 0$ с кривой $f = c$, для которой c имеет наибольшее или наименьшее значение, кривая $\varphi = 0$ имеет как раз особую точку, например точку заострения, как на черт. 52. Но в этом случае

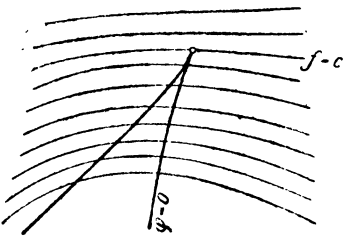
$$\varphi_x(\xi, \eta) = 0 \text{ и } \varphi_y(\xi, \eta) = 0.$$

Во всяком случае мы наглядным путем приходим к следующему правилу, которое мы докажем в п^о4. Для того чтобы функция $f(x, y)$ имела экстремальное значение в точке $x = \xi$, $y = \eta$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, необходимо должно выполняться следующее условие: существует такой множитель пропорциональности λ , что наряду с уравнением

$$\varphi(\xi, \eta) = 0,$$



Черт. 51.



Черт. 52.

удовлетворяются также оба уравнения:

$$f_x(\xi, \eta) + \lambda \varphi_x(\xi, \eta) = 0 \text{ и } f_y(\xi, \eta) + \lambda \varphi_y(\xi, \eta) = 0.$$

При этом однако предполагается, что не имеет места исключительный случай, когда в точке (ξ, η) удовлетворяются оба равенства

$$\varphi_x(\xi, \eta) = 0 \text{ и } \varphi_y(\xi, \eta) = 0.$$

Только что формулированное правило называется правилом множителей Лагранжа, а множитель λ называется лагранжевым множителем.

Мы видим, что это правило дает для определения величин ξ , η и λ столько уравнений, сколько имеется неизвестных. Таким образом мы свели разыскание точки экстремума (ξ, η) к задаче, в которой содержится еще одно неизвестное λ , но зато мы имеем преимущество вполне симметричной формулировки. Обычно правило Лагранжа выражают в следующей форме: нужно прибавить к функции $f(x, y)$, экстремальные значения которой при условии $\varphi(x, y) = 0$ требуется найти, функцию $\varphi(x, y)$, умноженную на неизвестный независимый от x и y множитель λ и затем написать известные необходимые условия

$$f_x + \lambda \varphi_x = 0, f_y + \lambda \varphi_y = 0$$

для экстремального значения функции $F = f + \lambda \varphi$. Вместе с данным условием $\varphi = 0$ эти условия служат для определения координат точек экстремума и множителя λ .

Прежде чем приведем точное доказательство правила множителей, мы на простом примере покажем, как это правило применяется. Мы ищем экстремальные значения, которые принимает функция

$$u = xy$$

на окружности радиуса 1 с центром в начале координат, т. е. при условии

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Для точек стационарности мы согласно нашему правилу частным дифференцированием функции $xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ по x и y находим два уравнения:

$$y + 2\lambda x = 0,$$

$$x + 2\lambda y = 0,$$

к которым присоединяем еще уравнение:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем четыре точки:

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \eta = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

И действительно, первые две точки дают максимальное значение $u = \frac{1}{2}$, а последние две точки дают минимальное значение $u = -\frac{1}{2}$ функции $u = xy$.

В том, что первые две точки действительно дают самое большее значение функции u , а последние две — самое меньшее значение, мы убеждаемся следующим образом. Наша функция должна на окружности принимать как наибольшее, так и наименьшее значение (стр. 88); так как окружность — замкнутая линия, т. е. не имеет краевых точек, то соответствующие точки должны непременно быть точками стационарности нашей функции.

4. Доказательство правила множителей для простейшего случая. Аналитическое доказательство правила множителей получается совершенно естественным путем, если свести дело к предыдущему случаю „свободных“ экстремальных значений. Допустим, что в точке экстремума (ξ, η) не обращаются в нуль одновременно обе частные производные $\varphi_x(\xi, \eta)$ и $\varphi_y(\xi, \eta)$; допустим например, что $\varphi_y(\xi, \eta) \neq 0$. Тогда на основании § 1, п° 3 мы можем в окрестности этой точки определить из уравнения $\varphi(x, y) = 0$ величину $y = g(x)$, как дифференцируемую функцию от x . Подставим это выражение в функцию $f(x, y)$, тогда функция

$$f[x, g(x)],$$

должна при $x = \xi$ иметь свободный экстремум. Необходимым условием для этого является требование, чтобы при $x = \xi$ удовлетворялось уравнение:

$$f'(x) = f_x + f_y g'(x) = 0.$$

Так как для заданной в неявном виде функции $y = g(x)$ имеет место соотношение $\varphi_x + \varphi_y g'(x) = 0$, то мы получаем, полагая для краткости $g'(\xi) = \lambda$, оба равенства:

$$f_x + \lambda f_y = 0, \quad \varphi_x + \lambda \varphi_y = 0,$$

откуда и вытекает правило множителей.

Мы видим, насколько существенным при этом доказательстве является допущение, что в точке (ξ, η) не обращаются одновременно в нуль обе частные производные φ_x и φ_y . Если обе эти производные обращаются в нуль, то наше правило неприменимо, как видно из следующего примера. Пусть требуется найти минимум функции

$$u = x^2 + y^2$$

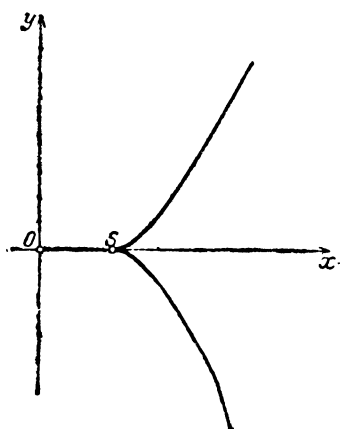
при условии, что

$$(x-1)^2 - y^2 = 0.$$

Кратчайшее расстояние начала координат от кривой $(x-1)^3 - y^2 = 0$, как видно из черт. 53, дается отрезком, соединяющим начало координат с точкой возврата S нашей кривой (легко убедиться, что окружность радиуса 1 с центром в начале координат других общих точек с нашей кривой не имеет). Координаты точки S , т. е. $x=1$, $y=0$, удовлетворяют, очевидно, уравнениям $\varphi(x, y)=0$ и $f_x + \lambda \varphi_x = 0$ даже при любом значении λ , но

$$f_x + \lambda \varphi_x = 2x + 3\lambda(x-1) = 2 \neq 0.$$

Мы можем правило множителей формулировать еще несколько по-иному в форме, которая особенно удобна для обобщения. Мы видели, что необходи-



Черт. 53.

мое условие для экстремального значения функции от одной или нескольких независимых переменных заключается в том, что дифференциал функции в соответствующей точке должен равняться нулю. В рассматриваемом случае мы также можем сказать: для того чтобы функция $f(x, y)$ имела экстремальное значение в точке (ξ, η) при условии $\varphi(x, y)=0$, необходимо, чтобы дифференциал df в этой точке равнялся нулю, если только предположить, что дифференциалы dx и dy в соответствующей точке не зависят друг от друга, а подбираются так, что удовлетворяется вытекающее из уравнения $\varphi=0$ соотношение:

$$dy = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0.$$

Таким образом при $x=\xi$ и $y=\eta$ непременно должно иметь место равенство:

$$df = f_x(\xi, \eta) dx + f_y(\xi, \eta) dy = 0,$$

если только числа dx и dy удовлетворяют уравнению $d\varphi=0$. Умножая первое уравнение на неопределенный пока множитель λ и прибавляя его ко второму уравнению, получим:

$$(f_x + \lambda \varphi_x) dx + (f_y + \lambda \varphi_y) dy = 0.$$

Подберем теперь множитель λ так, чтобы

$$f_y + \lambda \varphi_y = 0,$$

что можно сделать, так как $\varphi_y \neq 0$; тогда непременно и $(f_x + \lambda \varphi_x) dx = 0$, но величину dx мы можем выбрать произвольно, например равной единице, следовательно и

$$f_x + \lambda \varphi_x = 0.$$

5. Обобщение правила множителей. Совершенно аналогичным образом мы можем распространить наше правило множителей на случай большего

числа переменных и большего числа условных уравнений. Мы рассмотрим случай, который позволяет выяснить все существенные черты интересующего нас вопроса. Пусть требуется определить экстремальные значения функции

$$u = f(x, y, z, t),$$

если x, y, z и t связаны двумя уравнениями:

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \text{ и } \psi(x, y, z, t) = 0.$$

Допустим, что в точке (ξ, η, ζ, τ) функция действительно принимает экстремальное значение по сравнению со всеми смежными значениями, которые удовлетворяют данным двум условиям. Допустим далее, что в окрестности этой точки (ξ, η, ζ, τ) две из переменных, скажем z и t , можно выразить как функции остальных, т. е. x и y , из уравнений:

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \text{ и } \psi(x, y, z, t) = 0,$$

а именно, чтобы быть уверенными в разрешимости этих двух уравнений (стр. 131) с помощью функций $z = g(x, y)$ и $t = h(x, y)$, мы допустим, что в точке P функциональный определитель

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, t)} = \varphi_z \psi_t - \varphi_t \psi_z,$$

не равен нулю. Подставляя в функцию $u = f(x, y, z, t)$ вместо z и t функции

$$z = g(x, y) \text{ и } t = h(x, y),$$

мы получим, что функция u представляет функцию от двух независимых переменных x и y , и эта функция должна иметь в точке $x = \xi, y = \eta$ экстремальное значение, следовательно ее частные производные по x и y в этой точке должны равняться нулю. Итак, должны иметь место равенства:

$$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} + f_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} + f_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Для того чтобы вычислить встречающиеся здесь четыре производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial t}{\partial y},$$

при помощи данных уравнений, мы могли бы составить две системы уравнений:

$$\varphi_x + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

$$\psi_x + \psi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \psi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

и

$$\varphi_y + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

$$\phi_y + \phi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

и из них вычислить искомые величины $\frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial t}{\partial y}$, что возможно, так как определитель $\frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(z, t)}$ по условию не равен нулю. Задача тем самым была бы решена.

Однако вместо того, чтобы идти этим путем, мы для большей наглядности и формальной симметрии решения поступим следующим образом. Определим два числа λ и μ таким образом, чтобы в точке экстремума удовлетворялись уравнения:

$$f_z + \lambda \varphi_z + \mu \phi_z = 0$$

$$f_t + \lambda \varphi_t + \mu \phi_t = 0.$$

Нхождение этих двух множителей λ и μ всегда возможно в силу допущения о неравенстве нулю определителя $\frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(z, t)}$.

Умножая оба уравнения

$$\varphi_x + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \phi_x + \phi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

соответственно на λ и μ и прибавляя их к уравнению

$$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} + f_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

получим:

$$f_x + \lambda \varphi_x + \mu \phi_x + (f_z + \lambda \varphi_z + \mu \phi_z) \frac{\partial z}{\partial x} + (f_t + \lambda \varphi_t + \mu \phi_t) \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Отсюда в силу определения λ и μ следует:

$$f_x + \lambda \varphi_x + \mu \phi_x = 0.$$

Таким же образом, прибавляя к уравнению

$$f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} + f_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

уравнение

$$\varphi_y + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

умноженное на λ , и уравнение

$$\phi_y + \phi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

умноженное на μ , получаем:

$$f_y + \lambda \varphi_y + \mu \phi_y = 0.$$

Мы приходим таким образом к следующему результату. Если в точке (ξ, η, ζ, τ) функция имеет экстремальное значение и если в этой точке $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, t)} \neq 0$, то существуют такие два числа λ и μ , что в точке (ξ, η, ζ, τ) наряду с данными уравнениями

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

удовлетворяются также четыре уравнения:

$$f_x + \lambda \varphi_x + \mu \psi_x = 0,$$

$$f_y + \lambda \varphi_y + \mu \psi_y = 0,$$

$$f_z + \lambda \varphi_z + \mu \psi_z = 0,$$

$$f_t + \lambda \varphi_t + \mu \psi_t = 0.$$

Последние четыре уравнения имеют вполне симметричный характер. В них переменные x и y уже не занимают привилегированного положения. К этим же уравнениям мы пришли бы, если бы допустили только, что какой-нибудь из определителей

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, z)}, \dots, \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, t)},$$

не равен нулю, т. е. что может быть не z и t , а какие-то другие две из величин x, y, z, t выражаются через остальные. Правда, этой симметрии наших уравнений мы достигли тем, что кроме четырех искомым величин ξ, η, ζ, τ мы ввели еще два множителя λ и μ , так что теперь мы имеем уже не четыре, а шесть неизвестных $\xi, \eta, \zeta, \tau, \lambda, \mu$, для определения которых имеем в нашем распоряжении шесть указанных уравнений.

Мы могли бы провести наше доказательство в несколько более изящной форме, пользуясь дифференциалами, следующим образом. Необходимым условием для существования экстремального значения в точке P является уравнение:

$$df(x, y, z, t) = 0,$$

причем дифференциалы dz и dt должны быть выражены с помощью дифференциалов dx и dy . Но эти дифференциалы связаны между собой соотношениями:

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz + \varphi_t dt = 0,$$

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_z dz + \psi_t dt = 0,$$

которые получаются путем дифференцирования данных условных уравнений. Допустим, что не все определители второго порядка, составленные из коэффициентов двух предыдущих уравнений, обращаются в нуль в точке

$$(\xi, \eta, \zeta, \tau);$$

пусть например определитель $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, t)}$ не равен нулю, тогда мы можем разделить два числа λ и μ так, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$f_z + \lambda \varphi_z + \mu \psi_z = 0,$$

$$f_t + \lambda \varphi_t + \mu \psi_t = 0.$$

Умножим теперь обе части уравнения $df=0$ на λ , а уравнения $d\psi=0$ на μ и прибавим к обоим частям равенства $df=0$. Тогда, принимая во внимание предыдущие два уравнения, получаем:

$$d(f + \lambda \varphi + \mu \psi) = (f_x + \lambda \varphi_x + \mu \psi_x) dx + (f_y + \lambda \varphi_y + \mu \psi_y) dy = 0.$$

Так как здесь dx и dy являются независимыми дифференциалами (т. е. числами, которые можно выбрать как угодно), то из предыдущего соотношения следует, что наши числа λ и μ должны удовлетворять также уравнениям:

$$f_x + \lambda \varphi_x + \mu \psi_x = 0,$$

$$f_y + \lambda \varphi_y + \mu \psi_y = 0,$$

и мы опять приходим к нашему правилу множителей.

Подобным же образом можно формулировать и доказать правило множителей для любого числа переменных и любого числа условных уравнений. Правило в общем виде формулируем следующим образом. Если в функции

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n эти переменные не являются независимыми, а связаны между собой m условными уравнениями ($m < n$)

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

то мы вводим m множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и приравниваем частные производные функции

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

по x_1, x_2, \dots, x_n , считая $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ постоянными. Получающиеся таким образом уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

вместе с m данными уравнениями

$$\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_m = 0$$

образуют систему $m+n$ уравнений с $m+n$ неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Этим уравнениям непременно должны удовлетворять координаты всякой точки, в которой

функция имеет экстремальное значение, если только мы не имеем дело с исключительным случаем, когда в этой точке все функциональные определители m функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ по m из переменных x_1, x_2, \dots, x_n обращаются в нуль.

По поводу этого правила множителей важно заметить следующее. Речь идет только об изящном формальном правиле для характеристики точек, в которых функция достигает экстремального значения, и притом только о необходимом условии. Будет ли в найденных при помощи правила множителей точках функция действительно иметь максимальное или минимальное значение и когда это будет, — это вопрос, которого мы здесь и не затрагивали и общее исследование которого завело бы нас слишком далеко. В применении правила множителей, как и в случае независимых переменных, дело обстоит обыкновенно так, что существование экстремального значения заранее известно; если точка P при помощи правила множителей определяется однозначно и в этой точке не имеет места исключительный случай, то можно быть уверенным, что в найденной точке функция действительно имеет экстремальное значение.

6. Примеры. 1. Требуется найти наибольшее значение функции

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$$

при условии

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

Функция должна принимать на поверхности шара наибольшее значение, и так как шаровая поверхность не имеет краевых точек, то это значение будет максимальным в установленном нами смысле. Согласно нашему правилу образуем выражение:

$$F = x^2 y^2 z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - c^2).$$

Дифференцируя, получаем:

$$\begin{aligned} 2x y^2 z^2 + 2\lambda x &= 0 \\ 2x^2 y z^2 + 2\lambda y &= 0 \\ 2x^2 y^2 z + 2\lambda z &= 0. \end{aligned}$$

Решения, в которых x, y или z равны нулю, можем не рассматривать, так как в этих точках функция f принимает наименьшее значение — нуль. Остальные решения этой системы уравнений таковы;

$$x^2 = y^2 = z^2, \quad \lambda = -x^4.$$

Пользуясь условным уравнением, находим искомые значения координат:

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Во всех этих восьми точках функция принимает одно и то же значение $\frac{c^6}{27}$, которое и будет искомым максимальным значением. Поэтому для любой тройки чисел (x, y, z) имеет место соотношение:

$$\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3},$$

т. е. среднее геометрическое трех положительных чисел x^2 , y^2 и z^2 не больше их среднего арифметического.

Впрочем и для любого числа положительных чисел справедлива теорема, что среднее геометрическое нескольких чисел не больше их среднего арифметического. Доказательство вполне аналогично предыдущему.

2. В качестве второго примера рассмотрим такую задачу. Требуется найти треугольник, который при данном периметре $2s$ имел бы наибольшую площадь. По формуле Герона квадрат площади имеет следующее выражение:

$$f(x, y, z) = s(s-x)(s-y)(s-z);$$

следовательно дело заключается в том, чтобы найти максимум этой функции при условии

$$\varphi = x + y + z - 2s = 0,$$

причем x , y и z ограничены неравенствами:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \geq z, x + z \geq y, y + z \geq x.$$

На границе этой замкнутой области, т. е. там, где одно из неравенств заменяется равенством, функция повсюду имеет значение нуль, следовательно наибольшее значение функция принимает внутри области, и это значение имеет стационарный характер. Опять берем функцию

$$F(x, y, z) = s(s-x)(s-y)(s-z) + \lambda(x + y + z - 2s)$$

и путем дифференцирования получаем три уравнения:

$$-s(s-y)(s-z) + \lambda = 0, \quad -s(s-x)(s-z) + \lambda = 0,$$

$$-s(s-x)(s-y) + \lambda = 0.$$

Определяем λ из каждого из этих уравнений и приравниваем друг другу найденные выражения для λ . Окончательно получаем $x = y = z = \frac{2s}{3}$,

т. е. искомый треугольник должен быть равносторонним.

3. Наконец определим такую точку на поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

которая наименее удалена от данной точки (ξ, η, ζ) . Так как вместе с расстоянием и квадрат расстояния становится наименьшим, мы рассматриваем функцию

$$F(x, y, z) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + \lambda \varphi(x, y, z).$$

Дифференцируя, получаем в данном случае:

$$2(x - \xi) + \lambda \varphi_x = 0, \quad 2(y - \eta) + \lambda \varphi_y = 0, \quad 2(z - \zeta) + \lambda \varphi_z = 0,$$

или, записывая в другой форме, имеем:

$$\frac{x - \xi}{\varphi_x} = \frac{y - \eta}{\varphi_y} = \frac{z - \zeta}{\varphi_z}.$$

Эти уравнения показывают, что данная точка (ξ, η, ζ) должна лежать на нормали к поверхности, восстановленной в точке, для которой расстояние имеет экстремальное значение. Следовательно, для того чтобы попасть кратчайшим путем из данной точки на поверхность, надо во всяком случае идти по направлению нормальному к поверхности. Однако требуется еще подробное исследование для того, чтобы решить, имеем ли мы дело с максимальным или с минимальным значением или ни с тем, ни с другим. (Представьте себе например точку внутри шара: ближайшей к ней точкой на поверхности шара является один из концов диаметра, проходящего через данную точку; второй конец этого диаметра представляет наиболее удаленную точку.)

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ ТРЕТЬЕЙ.

§ 1. Достаточные условия экстремума.

В главе III в теории наибольших и наименьших значений мы ограничились только выводом необходимых условий для появления экстремального значения. Во многих случаях, с которыми приходится встречаться на практике, можно по специальному характеру задачи судить о природе найденной стационарной точки и решить, имеем ли мы дело с максимальным или минимальным значением. Однако важно иметь достаточные условия общего характера для решения вопроса о том, имеет ли функция в данной точке экстремальное значение или нет. Мы дадим здесь такие достаточные условия для типичного случая двух независимых переменных.

Рассмотрим точку (x_0, y_0) , которая дает стационарное значение функции, т. е. точку, в которой обращаются в нуль обе частные производные первого порядка от функции $f(x, y)$. Будет ли функция в этой точке иметь экстремальное значение или нет, зависит от того, сохраняет ли выражение

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

при всех достаточно малых значениях h и k один и тот же знак или нет. Разлагая это выражение по формуле Тэйлора (гл. II, стр. 76) с остаточным членом третьего порядка и принимая во внимание, что

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ и } f_y(x_0, y_0) = 0,$$

получаем:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}) + \epsilon \rho^3,$$

причем $\rho^2 = h^2 + k^2$, а ϵ стремится к нулю, когда расстояние ρ стремится к нулю.

Если выберем достаточно малую окрестность точки (x_0, y_0) , то в ней поведение разности

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

будет характеризоваться в основном выражением:

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

причем мы для сокращения записи полагаем

$$a = f_{xx}(x_0, y_0), \quad b = f_{xy}(x_0, y_0), \quad c = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Для того чтобы глубже исследовать вопрос об экстремальных значениях, мы должны изучить это однородное относительно h и k квадратичное выражение или, как говорят, квадратичную форму Q . При этом мы предполагаем, что не все коэффициенты a , b и c равны нулю. В этом исключительном случае, который мы здесь рассматривать не будем, пришлось бы при исследовании с помощью ряда Тэйлора брать члены более высокого порядка, чем второй. Относительно нашей квадратичной формы Q возможны три различных случая.

1. Форма определенная, т. е. она может при любых значениях h и k принимать только значения одного знака и обращается в нуль только при $h=0$, $k=0$; если этот знак положительный, то мы говорим об определенной положительной квадратичной форме, если знак отрицательный, то мы говорим об определенной отрицательной квадратичной форме. Например выражение $h^2 + k^2$, которое получается при

$$a=c=1 \text{ и } b=0,$$

будет определенной положительной формой выражение

$$-h^2 + 2hk - 2k^2 = -(h-k)^2 - k^2$$

есть определенная отрицательная форма.

2. Форма неопределенная, т. е. может принимать значения различных знаков, например форма $Q=2hk$, которая при $h=1$, $k=1$ принимает значение 2, а при $h=-1$, $k=1$ — значение -2 .

3. Наконец возможен еще третий случай, когда форма может обращаться в нуль и при значениях h и k отличных от $h=0$ и $k=0$, но может иметь только значения одного знака. Например форма $(h+k)^2$ обращается в нуль для всех пар значений h и k , для которых $h=-k$. Такие формы называются *полуопределенными*.

Квадратичная форма $Q=ah^2+2bhk+ck^2$ является определенной формой в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$ac - b^2 > 0,$$

при этом она является определенной положительной формой, если $a > 0$ (следовательно и $c > 0$), и определенной отрицательной, если $a < 0$.

Для того чтобы форма была неопределенной, необходимо и достаточно выполнение условия

$$ac - b^2 > 0;$$

наконец равенство

$$ac - b^2 = 0$$

характеризует случай полуопределенной формы¹⁾.

¹⁾ Эти условия выводятся следующим образом. Или $a=c=0$, тогда мы должны считать, что $b \neq 0$, и форма, как мы уже заметили, является неопределенной, следовательно наш критерий в данном случае правилен. Или a например не равно нулю, тогда мы можем написать:

$$ah^2 + 2bhk + ck^2 = a \left[\left(h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{ca - b^2}{a^2} k^2 \right];$$

Теперь мы докажем, что если наша квадратичная форма $Q(h, k)$ определенная положительная, то стационарное значение функции при

$$h=0 \text{ и } k=0$$

является минимальным значением. Если форма определенная отрицательная, то значение функции максимальное. Если форма неопределенная, то функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума. Таким образом определенный характер формы Q является достаточным условием для экстремального значения, а неопределенный характер формы исключает возможность экстремального значения в данной точке. Случай полуопределенной формы, который требует более сложных рассуждений, мы здесь не будем рассматривать.

Чтобы провести доказательство нашего первого утверждения, нам достаточно только опереться на тот факт, что в случае определенной положительной формы Q существует не зависящее от h и k положительное число m , такое, что

$$Q \geq 2m(h^2 + k^2) = 2mp^2.$$

В таком случае

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} Q(h, k) + \varepsilon p^2 \geq (m + \varepsilon)p^2.$$

Теперь выберем ρ настолько малым, чтобы число ε было по абсолютному значению меньше $\frac{1}{2} m$, тогда

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geq \frac{m}{2} \rho^2.$$

В определенной таким образом окрестности точки (x_0, y_0) значение функции следовательно повсюду больше значения $f(x_0, y_0)$, т. е. в точке (x_0, y_0) функция имеет минимум. Таким же образом следует в случае определенной отрицательной формы, что в точке (x_0, y_0) функция имеет максимальное значение.

эта форма, очевидно, является определенной, если $ca - b^2 > 0$, и в этом случае она имеет тот же знак, что и a ; форма полуопределенная, если $ca - b^2 = 0$, потому что она равна нулю при всех значениях h и k , удовлетворяющих уравнению $h:k = -b:a$, но принимает значения только одного знака; наконец форма будет неопределенной, если $ca - b^2 < 0$, так как в этом случае она принимает значения различных знаков, смотря по тому, обращается ли в нуль k или $h + \frac{b}{a}k$.

4) Чтобы в этом убедиться, будем рассматривать отношение $\frac{Q(h, k)}{h^2 + k^2}$ как функцию двух величин $u = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ и $v = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$. Тогда $u^2 + v^2 = 1$, и наша функция представляет непрерывную функцию от u и v , и потому должна принимать на окружности $u^2 + v^2 = 1$ наименьшее значение $2m$. Это число $2m$, очевидно, удовлетворяет нашим условиям; оно не равно нулю, так как на окружности u и v не могут одновременно обратиться в нуль.

Если наконец наша форма неопределенная, то существует система значений (h_1, k_1) , при которой форма Q имеет отрицательное значение, и другая пара значений (h_2, k_2) , при которой форма имеет положительное значение. В таком случае мы конечно можем найти такое положительное число m , что

$$Q(h_1, k_1) < -2m\rho_1^2,$$

$$Q(h_2, k_2) > 2m\rho_2^2.$$

Положим теперь

$$h = th_1, k = tk_1, \rho^2 = h^2 + k^2, (t \neq 0),$$

т. е. рассмотрим точку $(x_0 + h, y_0 + k)$, лежащую на прямой, соединяющей точки

$$(x_0, y_0) \text{ и } (x_0 + h_1, y_0 + k_1).$$

Так как

$$Q(h, k) = t^2 Q(h_1, k_1) \text{ и } \rho = t^2 \rho_1^2,$$

то и

$$Q(h, k) < -2m\rho^2.$$

Поэтому мы можем, выбрав t (а следовательно ρ) достаточно малым, сделать выражение

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

отрицательным. В самом деле достаточно выбрать t настолько малым, чтобы при $h = th_1, k = tk_1$ указанная ранее величина ε была по абсолютному значению меньше чем $\frac{m}{2}$, тогда получим, что

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < -\frac{m^2}{2} \rho,$$

т. е. значение функции $f(x_0 + h, y_0 + k)$ меньше стационарного значения $f(x_0, y_0)$. Подобным же образом мы можем, пользуясь аналогичным рассуждением для системы значений $h = th_2, k = tk_2$, найти в сколь угодно малой окрестности точки (x_0, y_0) такие точки, в которых значение функции больше $f(x_0, y_0)$. Следовательно в данном случае значение функции не является ни максимальным, ни минимальным, и мы имеем дело с гиперболической точкой.

Если в рассматриваемой точке $a = b = c = 0$, т. е. если Q тождественно равно нулю, или если форма полуопределенная, то наши рассуждения неприменимы. Если бы мы пожелали установить достаточные критерии и для этих исключительных случаев, то нам пришлось бы произвести довольно громоздкие вычисления.

Для решения вопроса о максимальном и минимальном значении получаем следующее правило.

Если в точке (x_0, y_0) кроме уравнений

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

удовлетворяется еще неравенство

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0,$$

то в этой точке функция имеет экстремальное значение, а именно максимум, если $f_{xx} < 0$ (следовательно и $f_{yy} < 0$), и минимум, если $f_{xx} > 0$.

Если же

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

то в этой точке функция не принимает экстремального значения. Случай

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$$

требует дополнительного исследования.

В заключение заметим, что наши условия имеют очень простой геометрический смысл. Необходимые условия $f_x = f_y = 0$ указывают, что касательная плоскость к нашей поверхности $z = f(x, y)$ горизонтальна.

Если мы имеем дело действительно с экстремальным значением, то это наглядно означает, что в окрестности рассматриваемой точки касательная плоскость не пересекается с поверхностью. В случае же гиперболической точки касательная плоскость пересекает нашу поверхность по кривой, которая в соответствующей точке имеет несколько ветвей. Эти обстоятельства станут еще яснее после изучения в ближайшем параграфе особых точек.

В качестве примера определим экстремальные значения функции

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by.$$

Приравнявая нулю частные производные первого порядка, получаем уравнения:

$$2x + y + a = 0, \quad x + 2y + b = 0,$$

которые имеют решение

$$x = \frac{1}{3}(b - 2a), \quad y = \frac{1}{3}(a - 2b).$$

Выражение

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3$$

имеет положительное значение, так же как и $f_{xx} = 2$, следовательно в этой точке функция имеет минимум.

Для функции

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$$

стационарной точкой является начало координат. В этой точке выражение

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

равно нулю, и наши критерии неприменимы, но легко видеть, что значение функции в этой точке не является экстремальным, так как функция принимает в любой окрестности начала координат как положительные, так и отрицательные значения.

Наоборот, функция

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$$

имеет в точке $x=1, y=1$ минимальное значение, хотя в этой точке выражение $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ обращается в нуль. В самом деле

$$f(1+h, 1+k) - f(1, 1) = (h-k)^2 + k^2,$$

а эта величина при $\rho \neq 0$ имеет положительное значение.

§ 2. Особые точки плоских кривых.

В главе III, § 2, н° 2 мы видели, что кривая $f(x, y) = 0$ в точке

$$x = x_0, y = y_0,$$

где выполняются три условия:

$$f(x_0, y_0) = 0, f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ и } f_y(x_0, y_0) = 0,$$

имеет, вообще говоря, особенности. Чтобы систематически изучить эти особые точки, мы предположим, что функция $f(x, y)$ имеет в окрестности рассматриваемой точки непрерывные частные производные до второго порядка включительно и что в этой точке не все частные производные второго порядка равны нулю.

Тогда, пользуясь формулой Тейлора, в которой мы ограничиваемся членами второго порядка, мы можем написать уравнение нашей кривой в виде:

$$2f(x, y) = (x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(x_0, y_0) + \\ + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) + \varepsilon \rho^2 = 0,$$

причем $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, а ε стремится к нулю вместе с ρ .

Уравнение любой прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) , мы можем записать с помощью параметра t в параметрической форме:

$$x - x_0 = at, y - y_0 = bt,$$

где a и b — произвольные постоянные, которые можно нормировать с помощью равенства $a^2 + b^2 = 1$. Определим точку пересечения этой прямой с кривой $f(x, y) = 0$, т. е. подставим эти выражения в предыдущее уравнение нашей кривой, тогда получим для точки пересечения уравнение:

$$a^2 t^2 f_{xx} + 2abt^2 f_{xy} + b^2 t^2 f_{yy} + \varepsilon(a^2 + b^2)t^2 = 0.$$

Из этого уравнения прежде всего получаем $t = 0$, т. е. точку (x_0, y_0) , что само собой разумеется; однако замечательно, что левая часть уравнения делится на t^2 , т. е. $t = 0$ является „двойным“ корнем уравнения. Поэтому иногда особые точки называют двойными точками кривой.

Сокращая на множитель t^2 , получаем уравнение:

$$a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy} + \varepsilon = 0.$$

Мы ставим вопрос, может ли случиться, чтобы одна из наших прямых пересекла кривую еще в дальнейшей точке, которая стремилась бы к точке (x_0, y_0) по мере того, как прямая приближается к некоторому предельному положению. Такое предельное положение секущей мы назовем касательной. Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что если точка неограниченно приближается к (x_0, y_0) , то t , а вместе с тем и ϵ стремятся к нулю.

Если предыдущее уравнение все время удовлетворяется, то соответствующее выражение $a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy}$ тоже должно стремиться к нулю, т. е. для предельного положения секущей должно удовлетворяться уравнение:

$$a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy} = 0.$$

Это условие приводит к квадратному уравнению, из которого находим отношение $a:b$, определяющее положение прямой.

Более детальное исследование, которого мы здесь проводить не будем, обнаруживает, что наше требование определяет, вообще говоря, две касательные в двойной точке.

Если дискриминант квадратного уравнения имеет отрицательное значение, т. е. если

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

то мы получаем две различные действительные касательные. Кривая имеет узловую точку, как например лемниската

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

в начале координат или строфоида

$$(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2 x^2 = 0$$

в точке $x_0 = a, y_0 = 0$.

Если дискриминант равен нулю, т. е. если

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0,$$

то никаких общих утверждений сделать нельзя, тогда обе ветви могут например касаться друг друга или мы можем иметь дело с точкой возврата.

Если наконец

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0,$$

то вообще нет (действительных) касательных. Это имеет место например в изолированных точках алгебраических кривых. Под этим разумеют точки, координаты которых удовлетворяют уравнению кривой, но в окрестности которых нет других точек кривой. Примером может служить кривая

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = a^4 + b^4.$$

Начало координат лежит на этой кривой, но для всех других значений из области $|x| < a\sqrt{2}, |y| < b\sqrt{2}$ левая часть меньше правой.

Случай, который мы здесь не рассматривали, когда все производные второго порядка равны нулю, требует дальнейших исследований, на которых

мы здесь останавливаться не будем. Через такую точку могут проходить несколько ветвей кривой или могут быть также особенности другого рода.

В заключение укажем в общих чертах на связь между этими рассуждениями и теорией наибольших и наименьших значений.

Касательная плоскость к поверхности $z=f(x, y)$ в стационарной точке (x_0, y_0) выражается просто уравнением:

$$z - f(x_0, y_0) = 0,$$

так как частные производные первого порядка равны нулю.

Уравнение

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0$$

представляет поэтому проекцию на плоскость x, y линии пересечения касательной плоскости с поверхностью, и мы видим, что точка (x_0, y_0) является особенной точкой этой кривой. Если эта точка является изолированной точкой, то в некоторой окрестности этой точки касательная плоскость не имеет других общих точек с поверхностью: функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) максимальное или минимальное значение (стр. 167). Если же мы имеем дело с узловой точкой, то касательная плоскость пересекается с поверхностью по кривой с двумя ветвями, и в данной точке функция не имеет ни максимального, ни минимального значения. Эти замечания приводят нас как раз к тем достаточным условиям, которые были найдены в § 1.

ГЛАВА IV.

ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В то время как дифференцирование и оперирование с производными в случае функций многих переменных почти непосредственно приводится к соответствующим понятиям для функции от одной переменной, с вопросом об интегрировании и о связи между интегрированием и дифференцированием для функций от многих переменных дело обстоит несколько сложнее, так как понятие интеграла можно обобщить на случай многих переменных различными способами. Действительно, в четвертой и пятой главе мы увидим, что наряду с наиболее естественным обобщением, именно с интегралами, распространенными на некоторую область, которые преимущественно рассматриваются в настоящей главе, нам приходится еще рассматривать так называемые криволинейные интегралы в плоскости и интегралы, взятые по поверхности, и криволинейные интегралы в пространстве трех измерений. Но и здесь мы также обнаружим, что в конечном счете все вопросы интегрирования опять сводятся к первоначальному понятию интеграла для случая одной независимой переменной.

§ 1. Обыкновенные интегралы как функции параметра.

Прежде чем приступить к изложению новых соотношений, имеющих место, в случае многих переменных, мы предварительно займемся изучением понятия, непосредственно примыкающего к вещам, нам знакомым.

1. Примеры и определения. Пусть $f(x, y)$ является непрерывной функцией от x и y в прямоугольной области $a \leq x \leq \beta$, $a \leq y \leq b$. Представим себе сперва величину x неизменной, и получающуюся таким образом функцию $f(x, y)$, рассматриваемую как функцию от y , интегрируем в пределах от a до b . Мы приходим таким образом к выражению:

$$\int_a^b f(x, y) dy,$$

которое зависит еще от выбора величины x . Мы следовательно рассматриваем не один только интеграл, а одновременно семейство таких интегралов

$\int_a^b f(x, y) dy$, которые получаются при различных значениях x . Эту вели-

чину x , которую при интегрировании надо фиксировать, но в выборе которой мы свободны, называют параметром. Наш обыкновенный интеграл является следовательно функцией от параметра x .

Такие интегралы, представляющие функции от параметра, очень часто встречаются в анализе и его приложениях. Так например имеем:

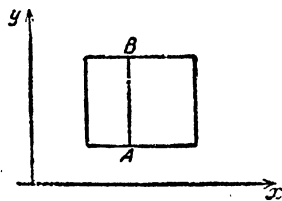
$$\int_0^1 \frac{x dy}{\sqrt{1-x^2 y^2}} = \arcsin x,$$

в чем легко убедиться путем подстановки $xu = u$. При интегрировании степени мы также можем рассматривать показатель степени как параметр n , соответственно этому, можем писать:

$$\int_0^1 y^x dy = \frac{1}{x+1},$$

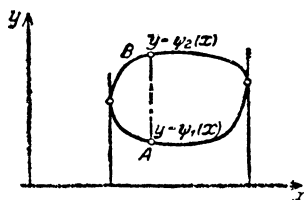
предполагая, что $x \geq 0$.

Представим себе геометрически область, в которой определена функция $f(x, y)$; функцию от y , которую требуется проинтегрировать при постоянном значении x , мы получаем, пересекая наш прямоугольник с соответствующей параллелью к оси y , как это изображено на черт. 54, и рассматривая совокупность значений функции $f(x, y)$ на отрезке AB как функцию от y . Мы можем сказать также, что мы интегрируем функцию $f(x, y)$ вдоль отрезка AB .



Черт. 54.

Это геометрическое рассмотрение, естественно,



Черт. 55.

приводит к следующему обобщению. Если область G , в которой мы хотим рассматривать функцию $f(x, y)$, не является прямоугольником, а имеет, скажем, вид, изображенный на черт. 55, т. е. граница этой области пересекается с любой прямой, параллельной к оси y , самое большее в двух точках, то мы можем таким же образом при постоянном значении x рассматривать совокупность значений функции $f(x, y)$ вдоль отрезка AB , по которому наша прямая, параллельная оси y , пересекается с областью G , как функцию от y и интегрировать ее. При этом в данном случае начальная и конечная точки промежутка интегрирования будут изменяться с изменением значения x ; иными словами, мы должны рассмотреть интеграл вида:

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy = F(x),$$

т. е. интеграл, у которого переменной интегрирования является y , а параметром служит x , причем параметр входит не только в подынтегральную

функцию, но и в пределы интегрирования. Например, если область, в которой определена функция, есть круг радиуса единицы с центром в начале координат, то нам придется рассматривать интегралы вида

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

2. Непрерывность и дифференцируемость интеграла как функции параметра. Интеграл

$$F(x) = \int_a^b f(x, y) dy,$$

представляет непрерывную функцию от параметра x , если $f(x, y)$ непрерывна в рассматриваемой области. В самом деле

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_a^b [f(x+h, y) - f(x, y)] dy \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x+h, y) - f(x, y)| dy; \end{aligned}$$

отсюда непосредственно следует наше утверждение, так как в силу равномерной непрерывности подынтегральная функция справа может быть сделана при достаточно малом значении h сколь угодно малой и притом равномерно относительно y . В частности следовательно функцию $F(x)$ можно интегрировать по параметру x .

Возникает вопрос, можно ли дифференцировать эту функцию и как это сделать. Рассмотрим сперва случай, когда пределы интегрирования постоянны, и допустим, что функция $f(x, y)$ имеет во всей замкнутой прямоугольной области G непрерывную частную производную f_x ; тогда естественно ожидать, что производную от интеграла по y можно образовать, меняя порядок операций дифференцирования и интегрирования, т. е. вместо того, чтобы сперва интегрировать, а затем дифференцировать, можно сперва дифференцировать $f(x, y)$ по x , а затем интегрировать по y . Действительно, имеет место следующая теорема: если функция $f(x, y)$ имеет непрерывную производную по x в замкнутой прямоугольной области $a \leq x \leq \beta$, $a \leq y \leq b$, то можно дифференцировать интеграл по параметру под знаком интеграла, т. е.

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b f_x(x, y) dy.$$

Доказательство: мы имеем право, если x и $x+h$ одновременно принадлежат указанному интервалу, написать:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^b f(x+h, y) dy - \int_a^b f(x, y) dy = \\ &= \int_a^b \{f(x+h, y) - f(x, y)\} dy. \end{aligned}$$

Ввиду того, что функция $f(x, y)$ по условию дифференцируема, то на основании теоремы о среднем значении в дифференциальном исчислении, пользуясь обычными обозначениями, имеем:

$$f(x+h, y) - f(x, y) = hf'_x(x + \vartheta h, y), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Так как далее по условию производная f'_x непрерывна в замкнутой области, следовательно и равномерно непрерывна, то разность

$$f'_x(x + \vartheta h, y) - f'_x(x, y)$$

по абсолютному значению меньше положительного не зависящего от x и y числа ε , которое стремится к нулю вместе с h . Следовательно

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b f'_x(x, y) dy \right| &= \left| \int_a^b f'_x(x + \vartheta h, y) dy - \int_a^b f'_x(x, y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dy = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Когда h стремится к нулю, то и ε стремится к нулю, и мы непосредственно получаем соотношение:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b f'_x(x, y) dy = F'(x),$$

которое обнаруживает правильность нашего утверждения.

Подобным же образом выводится непрерывность и правило дифференцирования интеграла по параметру, когда параметр входит в пределы интегрирования. Если например речь идет о дифференцировании

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

то мы берем за исходный пункт выражение:

$$F(x) = \int_u^v f(x, y) dy = \Phi(u, v, x),$$

причем полагаем $u = \phi_1(x)$ и $v = \phi_2(x)$; кроме того мы предполагаем, что в рассматриваемом интервале $\phi_2(x)$ и $\phi_1(x)$ имеют непрерывные производные по x и что функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x в области, охватывающей нашу основную область. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$F'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Принимая во внимание основную теорему интегрального исчисления (т. I, гл. II, стр. 94, 95), непосредственно получаем формулу:

$$F'(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f_x(x, y) dy - \phi_1'(x) f[x, \phi_1(x)] + \phi_2'(x) f[x, \phi_2(x)].$$

Если возьмем например функцию

$$F(x) = \int_0^x \sin(xy) dy,$$

то получим:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_0^x y \cos(xy) dy + \sin(x^2).$$

Далее примером могут служить интегралы:

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y) dy,$$

$$F_0(x) = \int_0^x f(y) dy,$$

где n — какое угодно целое положительное число, а $f(y)$ — непрерывная в рассматриваемом интервале функция только одной переменной y . Согласно нашему правилу непосредственно получаем:

$$F'_n(x) = F_{n-1}(x),$$

так как выражение, получающееся от дифференцирования по верхнему пределу, обращается в нуль при $y = x$. Таким образом без труда получаем, так как $F'_0(x) = f(x)$, что

$$F_n^{(n+1)}(x) = f(x).$$

Следовательно $F_n(x)$ есть такая функция, $(n+1)$ -я производная которой равна $f(x)$ и которая обращается в нуль при $x = 0$ вместе со своими первыми n производными.

Наши правила дифференцирования интеграла по параметру остаются во многих случаях справедливыми и в том случае, когда при дифференцировании под знаком интеграла получается функция, которая не повсюду непрерывна. Вместо того чтобы применять в этих случаях общие критерии, формулировка которых довольно громоздка, целесообразнее в каждом отдельном случае особо исследовать, допустимо ли такое дифференцирование или нет. В качестве примера рассмотрим эллиптический интеграл (т. I, стр. 210).

$$F(k) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (k^2 < 1).$$

Функция

$$f(k, x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

при $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow -1$ становится прерывной, но интеграл (как несобственный интеграл) имеет определенный смысл. Формальное дифференцирование по параметру k дает:

$$F'(k) = \int_{-1}^{+1} \frac{kx^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)^3}}.$$

Чтобы исследовать, справедливо ли это равенство, мы повторяем то рассуждение, которое привело нас раньше к формуле дифференцирования. Мы получаем:

$$\frac{F(k+h) - F(k)}{h} = \int_{-1}^{+1} f_k(k + \vartheta h, x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(k + \vartheta h)x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)[1 - (k + \vartheta h)^2 x^2]^3}}.$$

Это выражение отличается от интеграла, полученного путем формального дифференцирования, на

$$\Delta = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{k + \vartheta h}{\sqrt{[1 - (k + \vartheta h)^2 x^2]^3}} - \frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}} \right) dx.$$

Требуется доказать, что этот интеграл при $h \rightarrow 0$ стремится к нулю. Для этого мы ограничиваем вокруг k интервал $k_0 < k < k_1$, который не содержит значений $k=1$ и $k=-1$, и выбираем h настолько малым, чтобы значение $k + \vartheta h$ непременно попало в этот интервал. Функция

$$\frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}}$$

непрерывна в замкнутой области $-1 \leq x \leq 1$, $k_0 \leq k \leq k_1$, следовательно она там равномерно непрерывна. Поэтому разность

$$\left| \frac{k + \vartheta h}{\sqrt{[1 - (k + \vartheta h)^2 x^2]^3}} - \frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}} \right|$$

меньше некоторой грани ε , не зависящей от x и k и стремящейся к нулю, когда $h \rightarrow 0$. Вместе с тем интеграл Δ остается по абсолютному значению меньше чем

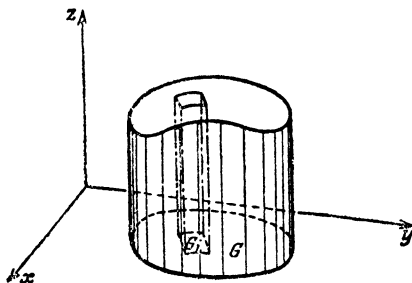
$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \varepsilon = M\varepsilon,$$

где M — определенное число, не зависящее от ε , т. е. интеграл Δ стремится к нулю, когда h стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Следовательно дифференцирование под знаком интеграла в данном случае законно. Подобные рассуждения приводят к цели во всех простых случаях.

§ 2. Интеграл непрерывной функции по плоской или пространственной области.

1. Интеграл по области как объем. К первому и наиболее важному обобщению обыкновенного интеграла мы, как и в случае одной независимой переменной, приходим путем геометрической интуиции. Пусть G — область плоскости x, y , ограниченная (как это всегда предполагается при наших рассуждениях) одной или несколькими кривыми с непрерывно вращающейся касательной; пусть далее $z = f(x, y)$ — функция непрерывная в замкнутой области G , относительно которой мы будем предполагать сперва, что она не имеет отрицательных значений, и представим себе эту функцию геометрически изображенной в виде куска поверхности, лежащего в пространстве x, y, z над областью G . На границе области G , в каждой точке ее мы восставляем перпендикуляры к плоскости x, y , совокупность которых образует цилиндрическую поверхность, перпендикулярную к этой плоскости.



Черт. 56.

Этой цилиндрической поверхностью, куском поверхности $z = f(x, y)$ и областью G в плоскости x, y ограничивается некоторая часть пространства. Объем V этого тела мы называем интегралом от функции $f(x, y)$, взятым по области G . При этом мы считаем наглядно очевидным тот факт, что имеет смысл говорить об объеме этой части пространства; более глубокое обоснование понятия объема, как и всех остальных понятий, которые вводятся в этом параграфе, опираясь на интуицию, мы дадим позже в дополнениях к этой главе. Совершенно так же, как в томе I, главе 2, стр 66, мы попытаемся теперь охарактеризовать этот объем числом V , которое мы определим с помощью определенного аналитического предельного процесса. При этом мы исходим из того, что хотя мы не умеем заранее измерить объем тела, ограниченного любыми кривыми поверхностями но зато умеем находить объем цилиндра, ограниченного двумя параллельными плоскостями, путем умножения площади основания на высоту. Точно так же мы можем

определить объем тела, состоящего из таких цилиндров, как сумму соответствующих частичных объемов. Для нашего тела, ограниченного кривою поверхностью, невозможно точно произвести такое разложение на некоторое конечное число цилиндрических тел, но мы можем рассматривать объем V как предел суммы цилиндрических объемов следующим образом. Делим область V конечным числом кривых (когда мы говорим просто о кривых, мы всегда разумеем кривые, имеющие непрерывно вращающуюся касательную) на ряд частичных областей G_1, G_2, \dots, G_n , причем площадь G равна сумме площадей частичных областей G_i . Строим на границе каждой частичной области цилиндрическую поверхность, перпендикулярную к плоскости x, y , тогда наше тело распадается на ряд трубок. Объем каждой из этих трубок мы также не можем точно выразить, как и весь объем V , но мы легко можем объем каждой трубки заключить между двумя пределами. В самом деле, обозначим через m_i наименьшее значение, которое принимает функция $f(x, y)$ в замкнутой области G_i , а через M_i — наибольшее из значений функции в этой области, тогда объем трубки, стоящей над областью G_i , заключается между объемами цилиндров с основанием G_i и высотам m_i , т. е. между числами

$$m_i \Delta G_i \text{ и } M_i \Delta G_i,$$

где ΔG_i означает площадь области G_i . Обе суммы

$$\sum_{i=1}^N m_i \Delta G_i$$

и

$$\sum_{i=1}^N M_i \Delta G_i$$

мы называем соответственно нижней и верхней суммой нашего подразделения и получаем для искомого объема V соотношение:

$$\sum_{i=1}^N m_i \Delta G_i \leq V \leq \sum_{i=1}^N M_i \Delta G_i.$$

Если мы теперь наше разбиение будем делать все более мелким так, чтобы число N областей становилось все больше и больше и вместе с тем наибольший диаметр этих частичных областей (т. е. наибольшее расстояние между двумя точками в каждой из них) стремился к нулю, то мы непосредственно видим, что верхняя сумма и нижняя сумма все более сближаются и что мы можем поэтому рассматривать наш объем и как предел верхней суммы, и как предел нижней суммы при $N \rightarrow \infty$.

Очевидно, что тот же предел G мы получим, если каждый раз вместо m_i или M_i мы возьмем какое угодно число, заключенное между m_i и M_i , например значение $f(x_i, y_i)$ функции в точке (x_i, y_i) области G_i .

2. Общее аналитическое определение понятия интеграла. Эти понятия, которые мы получили путем геометрической интуиции, мы должны теперь с необходимой общностью аналитически формулировать и уточнить, не обра-

шаясь непосредственно к интуиции. Для этого поступаем следующим образом. Рассматриваем замкнутую область G , площадь которой равна ΔG , и определенную в этой замкнутой области непрерывную функцию $f(x, y)$. Делим область указанным ранее способом с помощью каких угодно кривых на N частичных областей G_1, G_2, \dots, G_N с площадями $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_N$. В области G_i выбираем произвольную точку (ξ_i, η_i) , в которой значение функции $f_i = f(\xi_i, \eta_i)$, и образуем сумму

$$V_N = \sum_{i=1}^N f_i \Delta G_i.$$

Основная теорема гласит следующим образом: если число N неограниченно возрастает, и с возрастанием N наибольший из диаметров наших частичных областей стремится к нулю, то V_N стремится к пределу V . Этот предел не зависит от способа разбиения области G и от выбора точек (ξ_i, η_i) в области G_i . Этот предел V называют интегралом функции $f(x, y)$, взятым по области G , и обозначают символом

$$\iint_G f(x, y) dg.$$

Примечание. Тот же предел мы получаем, если мы каждый раз распространим суммирование только на те частичные области G_i , которые лежат целиком внутри G , т. е. не имеют общих точек с границей области G .

Только что сформулированная теорема о существовании интеграла ¹⁾ от непрерывной функции должна быть доказана чисто аналитическим путем.

¹⁾ Мы можем еще в формулировку этой теоремы внести некоторое дополнение, которое в иных случаях оказывается полезным. Нет необходимости при разделении на N частичных областей выбирать значения, которые функция действительно принимает в некоторой точке (ξ_i, η_i) , соответствующей частичной области; достаточно брать значения, которые отличаются от значений $f(\xi_i, \eta_i)$ на величины, стремящиеся равномерно к нулю, когда деления становятся все более и более мелкими. Иными словами можно вместо значений $f(\xi_i, \eta_i)$ рассматривать величины

$$f_i = f(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon_{i,N},$$

причем

$$|\varepsilon_{i,N}| < \varepsilon_N, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0,$$

($\varepsilon_{i,N}$ представляет следовательно разность между значением функции в рассматриваемой точке i -й частичной области при разбиении на N частичных областей и рассматриваемой нами величиной f_i , с помощью которой мы образуем сумму). Эта теорема почти очевидна. В самом деле, мы можем, так как величины $\varepsilon_{i,N}$ сами равномерно стремятся к нулю, сделать разность между обеими рассматриваемыми суммами

$$\sum_{i=1}^N f_i \Delta G_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N (f_i + \varepsilon_{i,N}) \Delta G_i$$

по абсолютному значению сколь угодно малой, если только выбрать число N достаточно большим.

Я приведу доказательство этой теоремы, вполне аналогичное соответствующему доказательству для случая одной независимой переменной, в дополнениях к этой главе.

Сначала выясним понятие интеграла путем рассмотрения частных разбиений. Простейший случай тот, когда G есть прямоугольник $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, и мы выбираем в качестве частичных областей G_i тоже прямоугольники со сторонами, параллельными осям, разбивая например интервал по оси x на n равных частей а интервал по оси y на m равных частей длины

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ и } k = \frac{d-c}{m},$$

точками деления $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ и $y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_m = d$ и проводя через эти точки деления соответственно прямые, параллельные оси x и оси y . В таком случае все частичные области являются прямоугольниками с площадью $\Delta G_i = hk = \Delta x \cdot \Delta y$, причем полагаем $h = \Delta x$, $k = \Delta y$. В качестве точки (ξ_i, η_i) мы можем взять любую точку в соответствующем прямоугольнике и должны образовать сумму

$$\sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta x \Delta y,$$

которая относится ко всем прямоугольникам нашего разбиения.

Если начнем одновременно неограниченно увеличивать числа m и n , то наша сумма будет стремиться к интегралу от функции f , распространенному по прямоугольной области G .

Каждый из наших прямоугольников можно охарактеризовать с помощью двух указателей ν и μ , соответствующих координатам нижнего левого конца прямоугольника: $x = \nu h$ и $y = \mu k$. При этом ν пробегает целые значения от 0 до $n-1$, а μ — значения от 0 до $m-1$. При такой нумерации прямоугольников с помощью индексов μ и ν целесообразно представить предыдущую сумму в виде двойной суммы:

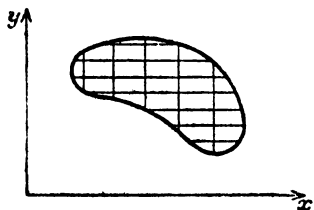
$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} f(\xi_\nu, \eta_\mu) \Delta x \Delta y.$$

Даже в том случае, когда G не является прямоугольником, часто оказывается выгодным разбивать область на частичные области прямоугольной формы. С этой целью представляем себе плоскость покрытой прямоугольной сетью, образуемой прямыми, параллельными осям координат

$$x = \nu h \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и

$$y = \mu k \quad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$



Черт. 57. Разбиение области с помощью прямоугольной сетки.

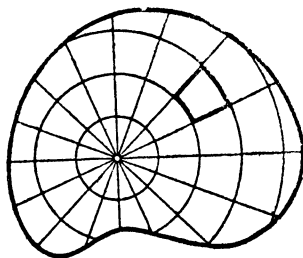
где h и k — произвольно выбранные числа, определяющие размеры отдельной петли сети. Рассмотрим теперь все те прямоугольники нашей сети, которые целиком лежат внутри области G . Эти прямоугольники мы обозначим через G_i . Эти прямоугольники не заполняют, правда, всей области G ; область G содержит еще частичные области G_j ,

примыкающие к границе, которые ограничены как отрезками прямых параллельных осей, так и отрезками кривой, ограничивающей область G . Но согласно замечанию на стр. 179, можно получить интеграл, взятый по области G , суммируя только слагаемые, относящиеся к внутренним прямоугольникам, и переходя затем к пределу.

Другим возможным разбиением области является частое применяемое разбиение с помощью сети полярных координат. Пусть полюс O лежит внутри нашей области. Делим тогда весь угол

2π на n частей величины $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n} = h$ и выби-

раем далее величину $k = \Delta r$. Теперь мы проводим проходящие через полюс прямые $\vartheta = \nu h$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$) и concentрические окружности $r_\mu = \mu k$ ($\mu = 1, 2, \dots$). Они разбивают плоскость на части, как это изображено на черт. 58. Те частичные области, которые целиком лежат внутри G , обозначим через G_μ , их площади — через ΔG_μ . Тогда мы опять можем рассматривать интеграл от функции $f(x, y)$, взятый по области G , как предел суммы



Черт. 58. Разбиение с помощью сети полярных координат.

$$\sum f(\xi_\mu, \eta_\mu) \Delta G_\mu$$

при этом (ξ_μ, η_μ) есть произвольно выбранная точка в частичной области G_μ , сумма берется по всем G_μ , целиком лежащим внутри области G , а предельный переход заключается в том, что h и k одновременно стремятся к нулю.

Площадь ΔG_μ на основании простых положений элементарной геометрии выражается так:

$$\Delta G_\mu = \frac{1}{2} (r_{\mu+1}^2 - r_\mu^2) h = \frac{1}{2} (2\mu + 1) k^2 h,$$

причем предполагается, что G_μ лежит в кольце, ограниченном окружностью радиусов μk и $(\mu + 1) k$.

3. Примеры. Простейший пример представляет функция $f(x, y) = 1$. В данном случае очевидно, что независимо от способа разбиения сумма всегда равна площади области G , а потому и интеграл функции $f(x, y) = 1$, взятый по нашей области, также равен этой площади, как и следовало ожидать, так как в данном случае интеграл означает объем цилиндра, высота которого равна единице, а основанием служит данная область G .

В качестве дальнейшего примера рассмотрим интеграл функции $f(x, y) = x$, взятый по квадрату $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$. Истолковывая интеграл геометрически как объем, мы заключаем, пользуясь элементарной геометрией, что значение нашего интеграла должно равняться $\frac{1}{2}$. Подтвердим это,

исходя из аналитического определения интеграла. Для этого разобьем нашу область на квадраты со стороной $h = \frac{1}{n}$ и возьмем за точки (ξ_μ, η_μ) левые нижние вершины частичных квадратов, тогда для всех лежащих друг над

другом квадратов, левые концы которых имеют абсциссу yh , получаем в нашей сумме слагаемые yh^3 . Число таких слагаемых n , следовательно в сумме они дают выражение $nh^3 = yh^2$. Суммируя теперь по y от $y=0$ до $y=n-1$, мы получаем:

$$\sum_{y=0}^{n-1} yh^3 = \frac{n(n-1)}{2} h^2 = \frac{1}{2} - \frac{h}{2}.$$

Предел этого выражения при $h \rightarrow 0$ равен $\frac{1}{2}$, как мы и утверждали.

Подобным же образом можно интегрировать произведение xu или вообще функцию $f(x, y)$ от обеих переменных x и y , которая может быть представлена в виде произведения функции, зависящей только от x , на функцию, зависящую только от y , т. е. в виде $f(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$, когда область интегрирования есть прямоугольник со сторонами, параллельным осям координат, например квадрат

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

В самом деле, пользуясь тем же разбиением нашей области, что и на стр. 180, и выбирая в каждом частичном интервале за значение функции то значение, которое функция принимает в левом нижнем конце, получаем искомый интеграл как предел суммы

$$hk \sum_{y=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} \varphi(yh) \psi(\mu k),$$

которую мы можем также записать как произведение двух сумм в виде:

$$\sum_{y=0}^{n-1} \varphi(yh) h \sum_{\mu=0}^{m-1} \psi(\mu k) k.$$

Но, согласно определению обыкновенного интеграла, каждый из этих двух множителей при $h \rightarrow 0$ и соответственно при $k \rightarrow 0$ стремится к интегралу от соответствующей функции, взятому в пределах от 0 до 1. Поэтому для нашего интеграла, взятого по области, имеет место соотношение

$$\iint_G \varphi(x) \psi(y) dg = \int_0^1 \varphi(x) dx \int_0^1 \psi(y) dy.$$

На основании этого правила и правила суммы можно интегрировать например все целые рациональные функции по прямоугольным областям, стороны которых параллельны осям.

В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда удобнее пользоваться не прямоугольным разбиением, а разбиением сеткой полярных координат. Пусть областью G является круг радиуса единицы с центром в начале координат, т. е. область определяется неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$, пусть далее

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Иными словами: требуется найти объем полушара радиуса 1.

Исходя из нашего предыдущего разбиения с помощью полярных координат, мы получим для частичной области, заключающейся между концентрическими окружностями с радиусами $r_\mu = \mu k$ и $r_{\mu+1} = (\mu + 1)k$ и прямыми $\vartheta = \nu h$ и $\vartheta = (\nu + 1)h$ (где $h = \frac{2\pi}{n}$), слагаемое:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r_{\mu+1} + r_\mu}{2}\right)^2} (r_{\mu+1}^2 - r_\mu^2) h = \sqrt{1 - \rho_\mu^2} \rho_\mu k h,$$

при этом за значение функции мы взяли то значение в области G , которое функция принимает на средней окружности радиуса

$$\rho_\mu = \frac{r_{\mu+1} + r_\mu}{2}.$$

Всем частичным областям, лежащим в одном и том же круговом кольце, соответствуют равные слагаемые, и так как число их $n = \frac{2\pi}{h}$, то сумма слагаемых, соответствующих всему этому круговому кольцу, равна

$$2\pi \sqrt{1 - \rho_\mu^2} \rho_\mu k.$$

Следовательно наш интеграл является пределом суммы

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} 2\pi \sqrt{1 - \rho_\mu^2} \rho_\mu k,$$

а эта сумма, как известно, стремится к обыкновенному интегралу:

$$2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = -\frac{2}{3} \pi (\sqrt{1 - r^2})^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi.$$

Итак мы получаем:

$$\iint_G \sqrt{1 - x^2 - y^2} dg = \frac{2}{3} \pi,$$

что вполне согласуется с известной формулой для объема шара.

4. Обозначения, дополнения, основные правила. С разбиением области G на прямоугольники связано то обозначение интеграла, взятого по области, которое получило общее распространение со времени Лейбница. Исходя из записи суммы

$$\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^m f(\xi_\nu, \eta_\mu) \Delta x \Delta y,$$

где суммирование происходит по всем частичным прямоугольникам, отмечают переход к пределу тем, что вместо двойного знака суммы пишут двойной знак интеграла, а вместо произведения величины Δx и Δy пишут

символ $dx dy$. Таким образом часто интеграл, взятый по области, пишут в виде:

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

вместо записи

$$\iint_G f(x, y) dg.$$

при которой мы площадь ΔG заменяем символом dg .

Ясно, что название переменных интегрирования в интегралах, взятых по области, так же, как и в случае обыкновенных определенных интегралов, никакой роли не играет, и что мы могли бы с равным правом писать:

$$\iint_G f(u, v) du dv$$

или

$$\iint_G f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Мы видели, когда вводили понятие интеграла, что в случае положительной функции $f(x, y)$ интеграл

$$\iint_G f(x, y) dg$$

представляет объем, лежащий под частью поверхности $z = f(x, y)$. Так как при аналитическом определении интеграла функция $f(x, y)$ может и не быть повсюду положительной, но может быть и повсюду отрицательной или же менять знак (последнее означает, что рассматриваемая поверхность пересекает нашу область G), то наш интеграл в общем случае дает искомый объем с определенным знаком, а именно с положительным знаком для таких поверхностей или кусков поверхностей, которые лежат над плоскостью x, y , и с отрицательным для таких поверхностей, которые лежат под плоскостью x, y . Если же кусок поверхности, соответствующий области G , состоит из нескольких различных частей такого рода, то интеграл представляет собой сумму взятых с соответствующими знаками объемов. В частности, интеграл может оказаться равным нулю, хотя функция, стоящая под знаком интеграла, может и не равняться повсюду нулю.

Для интегралов, взятых по области, так же, как и в случае одной независимой переменной, справедливы следующие правила, доказательство которых представляет простое повторение рассуждений, изложенных в первом томе на стр. 68 и 69. Если c постоянная, то

$$\iint_G c f(x, y) dg = c \iint_G f(x, y) dg.$$

Далее

$$\iint_G [f(x, y) + \varphi(x, y)] dg = \iint_G f(x, y) dg + \iint_G \varphi(x, y) dg,$$

т. е. интеграл суммы двух функций равен сумме обоих интегралов. Наконец, если область G состоит из двух частичных областей G' и G'' , которые имеют общими самое большее только куски кривых, образующих границу, то имеет место соотношение:

$$\iint_G f(x, y) dg = \iint_{G'} f(x, y) dg + \iint_{G''} f(x, y) dg,$$

т. е. при сложении различных областей складываются соответствующие интегралы.

5. Оценка интегралов и теорема о среднем значении. Совершенно так же, как и в случае одной независимой переменной для интегралов, взятых по области, справедливы некоторые часто употребляемые оценки. Отсылая к первому тому, главе II, § 7, могу ограничиться здесь только перечислением следующих фактов.

Если в области G функция $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_G f(x, y) dg \geq 0;$$

подобным же образом из соотношения $f(x, y) \leq 0$ вытекает соотношение

$$\iint_G f(x, y) dg \leq 0.$$

Отсюда следует: если повсюду в области G

$$f(x, y) \geq \varphi(x, y),$$

то справедливо и соотношение

$$\iint_G f(x, y) dg \geq \iint_G \varphi(x, y) dg$$

Непосредственное применение этой теоремы представляют формулы:

$$\iint_G f(x, y) dg \leq \iint_G |f(x, y)| dg$$

и

$$\iint_G f(x, y) dg \geq - \iint_G |f(x, y)| dg.$$

Эти два неравенства можно также объединить, записав в виде:

$$\left| \iint_G f(x, y) dg \right| \leq \iint_G |f(x, y)| dg.$$

Далее пусть m означает нижнюю грань значений функции $f(x, y)$ в области G , а M — верхнюю грань их. Тогда

$$m \Delta G \leq \iint_G f(x, y) dg \leq M \Delta G,$$

где ΔG означает площадь области G . Наш интеграл можно поэтому представить в виде:

$$\iint_G f(x, y) dg = \mu \Delta G,$$

где μ есть некое промежуточное значение между m и M , величину которого мы, вообще говоря, точнее охарактеризовать не можем ¹⁾. Эту формулу для оценки значения интеграла мы опять назовем теоремой о среднем значении в интегральном исчислении.

Точно так же и в данном случае справедливо следующее обобщение. Если $p(x, y)$ — произвольная непрерывная и положительная функция в области G , то

$$\iint_G p(x, y) f(x, y) dg = \mu \iint_G p(x, y) dg,$$

где μ снова означает промежуточное значение между наибольшим и наименьшим значениями функции f .

Наши оценки интегралов, как и в случае одной переменной, указывают, что значение интеграла непрерывно изменяется вместе с функцией, точнее: если $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — две функции, которые во всей области удовлетворяют соотношению:

$$|f(x, y) - \varphi(x, y)| < \varepsilon,$$

где под ε разумеется определенное положительное число, то интегралы

$$\iint_G f(x, y) dg$$

и

$$\iint_G \varphi(x, y) dg$$

отличаются между собой меньше чем на $\varepsilon \Delta G$, т. е. меньше чем на число, которое вместе с ε стремится к нулю.

Подобным же образом мы видим, что интеграл функции непрерывно изменяется с непрерывным изменением области, т. е. если области G' и G'' получаются одна из другой таким образом, что к одной из них прибавляют или отнимают области, общая площадь которых не превосходит ε , и если функция $f(x, y)$ непрерывна в обеих областях и следовательно $|f(x, y)| < M$, где M — некоторое постоянное число, то оба интеграла

$$\iint_{G'} f(x, y) dg$$

и

$$\iint_{G''} f(x, y) dg$$

¹⁾ Как и в случае непрерывной функции от одной переменной, можно во всяком случае утверждать, что непрерывная функция $f(x, y)$ действительно принимает значение μ в точках области G .

отличаются между собой меньше чем на $M\epsilon$, следовательно меньше чем на число, которое вместе с ϵ стремится к нулю. Доказательство этого факта на основании последней теоремы предыдущего номера понятно само собой.

Мы можем поэтому с любой точностью вычислить интеграл, распространенный на область G , если мы ее ораспостраним на часть области G , площадь которой достаточно мало отличается от площади области G . Например мы можем вписать в область G прямолинейный многоугольник, площадь которого сколь угодно мало отличается от площади G ; в частности, мы можем принять, что этот многоугольник ограничен прямыми, параллельными то оси x , то оси y , т. е. что он составлен из прямоугольников со сторонами, параллельными осям.

6. Интегралы, распространенные на трехмерные и многомерные области. Все, что было сказано в предыдущем относительно интегралов, распространенных на области в плоскости x, y , можно без осложнений и не вводя новых идей перенести на области трех и большего числа измерений. Рассмотрим например случай интеграла, взятого по трехмерной области G . Нам придется теперь только разбить эту область конечным числом кусков поверхностей на частичные области, которые вместе взятые исчерпывают область G ; обозначим их через G_1, G_2, \dots, G_N . Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области G , и пусть (ξ_i, η_i, ζ_i) есть произвольная точка в области G_i , тогда мы опять образуем сумму

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta G_i,$$

где ΔG_i означает объем области G_i . Сумма берется по всем областям G_i или, если нам это удобнее, только по тем из них, которые не имеют общих точек с границей области G . Увеличивая неограниченно число частичных областей так, чтобы при этом диаметр наибольшей из них стремился к нулю, опять получим предел суммы, не зависящий ни от способа разбиения на частичные области, ни от выбора точек внутри частичных областей, и этот предел мы называем интегралом от функции $f(x, y, z)$, взятым по области G , и обозначаем так:

$$\iiint_G f(x, y, z) dg.$$

Если в частности разобьем нашу область на прямоугольные области со сторонами $\Delta x, \Delta y$ и Δz , то объемы внутренних частичных областей все будут равны $\Delta x \Delta y \Delta z$. Совершенно подобно тому, как это мы делали выше, мы отмечаем этот способ разбиения и перехода к пределу тем, что наряду с указанным ранее обозначением интеграла, вводим еще следующее символическое обозначение:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

Все приведенные ранее факты оказываются справедливыми и для пространственных интегралов.

И для областей, число измерений которых больше трех, можно определить понятие интеграла, взятого по области, таким же путем, если только соответствующим образом установлено понятие объема для такой области. Ограничимся сперва прямоугольными областями и разложим их на параллельно ориентированные частные области; далее объем прямоугольника

$$a_1 \leq x_1 \leq a_1 + h, \quad a_2 \leq x_2 \leq a_2 + h, \dots, \quad a_n \leq x_n \leq a_n + h,$$

мы определим как произведение $h_1 h_2 \dots h_n$, тогда определение понятия интеграла не нуждается в дальнейших разъяснениях. Для областей более общего характера и для более общих разбиений можно опираться на абстрактное определение объема, которое мы дадим в § 1 дополнений к этой главе. Впрочем мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением интегралов в прострстве с числом измерений, не превосходящим трех.

7. Дифференцирование по области. Масса и плотность. В случае простых интегралов и функций от одной переменной мы из интеграла получаем подынтегральную функцию процессом дифференцирования, а именно мы разрезаем интеграл на промежуток длины h , делим этот интеграл на длину интервала h и переходим к пределу при $h \rightarrow 0$. Этот факт выражает в случае функций от одной переменной зависимость, лежащую в основе всего дифференциального и интегрального исчисления, и наглядно иллюстрируется с помощью физических понятий: общая масса и плотность. Такая же зависимость существует и в случае интегралов, взятых по области, от функций многих переменных (хотя в данном случае, правда, эта зависимость не играет такой основной роли).

В самом деле, если возьмем интеграл

$$\iint_B f(x, y) dg$$

или

$$\iiint_B f(x, y, z) dg$$

от непрерывной функции двух или большего числа переменных по области B , которая содержит точку P с координатами x_0 и y_0 (или x_0, y_0 и z_0) и имеет площадь ΔB , и разделим значение интеграла на число ΔB , то из рассмотрения в п° 5 вытекает, что частное представляет среднее значение подынтегральной функции, т. е. некоторое промежуточное значение между наибольшим и наименьшим значением подынтегральной функции в области B . Если начнем теперь неограниченно уменьшать диаметр области B , окружающей точку P , а вместе с тем и площадь ΔB будет стремиться к нулю, то среднее значение функций $f(x, y)$ или $f(x, y, z)$ будет стремиться к значению функции в точке P , и при переходе к пределу мы получим следовательно соотношение

$$\lim_{\Delta B \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta B} \iint_B f(x, y) dg = f(x_0, y_0),$$

или

$$\lim_{\Delta B \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta B} \iiint_B f(x, y, z) dg = f(x_0, y_0, z_0).$$

Мы назовем этот предельный переход, соответствующий, как было указано в случае интегралов от функций одной независимой переменной, дифференцированию, дифференцированием интеграла по области; мы можем следовательно утверждать: дифференцирование по области интеграла, взятого по области, дает подынтегральную функцию.

Эта связь дает нам возможность и в случае функций многих переменных наглядно иллюстрировать отношение между интегралом и подынтегральной функцией с помощью физических понятий общей массы и плотности. Представим себе, что масса некоторого вещества непрерывно распределена по двумерной или трехмерной области G , т. е. что в достаточно малой частичной области находится сколь угодно малое количество массы. Чтобы определить плотность в точке P , мы рассматриваем сперва некоторую окрестность B точки P , площадь (или объем) которой равен ΔB , и делим массу заключенную внутри этой окрестности, на эту площадь ΔB . Это частное мы называем средней плотностью в этой частичной области. Если будем теперь неограниченно уменьшать диаметр этой области, то в пределе из средней плотности в области B получаем плотность в точке P (предполагая, что такой предел, не зависящий от выбора последовательности областей, существует). Такой переход к пределу с точки зрения физики конечно представляет собой идеализацию; в том, что такая идеализация целесообразна, как раз и заключается физическое допущение о существовании определенной плотности в точке P .

Обозначая эту плотность через $\mu(x, y)$ или через $\mu(x, y, z)$, мы непосредственно видим, что только что описанный процесс представляет не что иное, как дифференцирование по области интеграла

$$\iint_G \mu(x, y) dg$$

или

$$\iiint_G \mu(x, y, z) dg,$$

взятого по всей области G . Этот интеграл выражает следовательно всю массу вещества плотности μ в области G ¹⁾.

Введенные нами понятия сохраняют впрочем математический смысл и в том случае, когда μ не является повсюду положительной функцией. И с физической точки зрения отрицательные плотности и массы находят применение например в учении о распределении электрического заряда.

§ 3. Вычисление интеграла, взятого по области, с помощью обыкновенных интегралов.

Для возможности вычисления интегралов, взятых по области, очень важное значение имеет то обстоятельство, что каждый такой интеграл

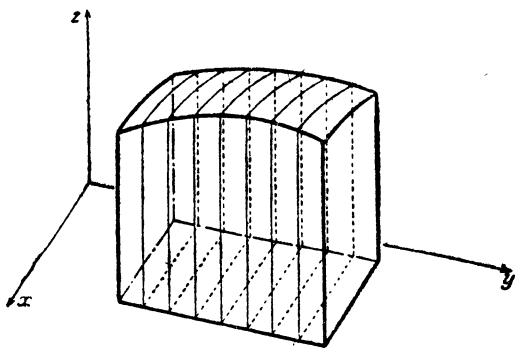
¹⁾ Чтобы вполне обосновать это утверждение, следовало, правда, доказать, что масса однозначно определяется требованием, чтобы при дифференцировании по области получалось μ . Однако я здесь не стану приводить это доказательство, которое затруднений не представляет.

можно свести к обыкновенным интегралам. Благодаря этому становится возможным применение всех ранее указанных методов неопределенного интегрирования к вычислению интегралов, распространенных по области.

1. Случай прямоугольника. Рассмотрим сначала область G , представляющую прямоугольник $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq \beta$ в плоскости x, y и непрерывную в этой области функцию $f(x, y)$. Приведение вычисления интеграла по области

$$\iint_G f(x, y) dy$$

к простым интегрированиям получается из наглядного рассмотрения, которое мы затем должны будем аналитически уточнить. Прежде всего мы вспоминаем, исходя из интерпретации интеграла по области, как некоторого объема, что объем мы находим разбиением на столбики, диаметры основания которых стремятся к нулю. Но вместо такого разбиения на столбики мы могли бы также разбить тело на пластины ширины $k = \frac{\beta - a}{n}$, проводя в плоскости x, y прямые $y = a + vk$ ($v = 0, 1, \dots, n$), параллельные оси x и восстанавливая вдоль этих прямых плоскости, перпендикулярные к плоскости x, y . Эти плоскости разбивают искомый объем на n пластин, которые будут тем тоньше, чем больше n , и сумма их объемов дает значение интеграла. Далее мы видим, что объем v -й пластины приблизительно равен произведению из толщины k на площадь передней боковой стенки, т. е.



Черт. 59. Разбиение объема на пластины.

их объемов дает значение интеграла. Далее мы видим, что объем v -й пластины приблизительно равен произведению из толщины k на площадь передней боковой стенки, т. е.

$$k \int_a^b f(x, a + vk) dx.$$

Конечно это выражение объема пластины не вполне точное, потому что площадь передней стенки несколько отличается например от площади задней стенки той же пластины.

Если положим следовательно

$$\int_a^b f(x, y) dx = \varphi(y),$$

то искомый объем будет приблизительно выражаться суммой

$$\sum_{v=0}^{n-1} \varphi(a + vk) k$$

С неограниченным убыванием $k = \frac{\beta - a}{n}$ эта сумма стремится к

$$\int_a^{\beta} \varphi(y) dy,$$

следовательно естественно ожидать, что имеет место тождество:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_a^{\beta} \varphi(y) dy.$$

Это равенство, которое нам еще сейчас придется строго доказать, сводит вычисление интеграла по области к последовательному выполнению двух простых интегрирований. Мы должны сначала интегрировать функцию $f(x, y)$ при постоянном значении y по x в пределах от a до b . Этот интеграл является функцией параметра y , и эту функцию мы должны интегрировать в пределах от a до β . Выражая это с помощью формул, имеем:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_a^{\beta} \varphi(y) dy, \quad \varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

или короче

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_a^{\beta} dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Чтобы чисто аналитически обосновать этот результат, полученный нами пока на основании геометрической интуиции, мы возвращаемся к определению интеграла, данному в § 2. Полагая $h = \frac{b-a}{m}$, согласно определению, имеем:

$$\iint_G f(x, y) dg = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^m f(a + \mu h, a + \nu k) hk;$$

при этом предел мы должны понимать в том смысле, что сумма в правой части отличается от значения интеграла меньше, чем на произвольно малое, наперед заданное число ε , если только оба числа m и n выбраны большими, чем некоторая грань N , зависящая только от ε . Вводя выражение

$$\Phi_{\nu} = \sum_{\mu=1}^m f(a + \mu h, a + \nu k) h,$$

мы можем представить предыдущую сумму в виде:

$$\sum_{\nu=1}^n \Phi_{\nu} k;$$

если выберем теперь для ε совершенно произвольное значение, например $\frac{1}{100}$ или $\frac{1}{10\,000}$, а для n — какое-нибудь определенное постоянное значение большее, чем N , то мы знаем, что

$$\left| \iint_G f(x, y) \, dg - k \sum_{v=1}^n \Phi_v \right| < \varepsilon,$$

как бы велико ни было число m , предполагая только, что и оно больше N . Если станем теперь при постоянном n неограниченно увеличивать число m , то при этом предельном переходе предыдущее выражение останется меньшим или равным ε . Но при этом выражение Φ , согласно определению обыкновенного определенного интеграла стремится к интегралу

$$\int_a^b f(x, a + vk) \, dx = \varphi(a + vk),$$

и мы получаем следовательно неравенство:

$$\left| \iint_G f(x, y) \, dg - k \sum_{v=1}^n \varphi(a + vk) \right| \leq \varepsilon,$$

которое справедливо при произвольно малом значении ε для всех n , больших постоянного числа N , зависящего только от ε . Если станем теперь неограниченно увеличивать n (при этом k стремится к нулю), то неравенство останется справедливым, и мы получаем тотчас же, в силу соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{v=1}^n \varphi(a + vk) = \int_a^b \varphi(y) \, dy,$$

непосредственно вытекающего из определения обыкновенного интеграла и непрерывности функции

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx,$$

неравенство:

$$\left| \iint_G f(x, y) \, dg - \int_a^b \varphi(y) \, dy \right| \leq \varepsilon.$$

Так как ε можно выбрать заранее сколь угодно малым, а в левой части находится постоянное число, то это неравенство может иметь место только в том случае, если левая часть его равна нулю, т. е. если

$$\iint_G f(x, y) \, dg = \int_a^b dy \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Преобразование таким образом доказано.

Этот результат следовательно обнаруживает, что интегрирование по области сводится к двум последовательным обыкновенным интегрированиям. Говорят: интеграл, взятый по области, можно представить в виде двойного интеграла.

Не требует особого обоснования то положение, что при нашем разбиении можно было бы поменять ролями x и y и что в силу этого справедливо также равенство:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_a^b dx \int_a^{\beta} f(x, y) dy.$$

2. Следствия. Из двух последних формул предыдущего номера вытекает соотношение:

$$\int_a^{\beta} dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_a^{\beta} f(x, y) dy,$$

т. е. при двукратном интегрировании непрерывной функции с постоянными пределами интегрирования можно изменить порядок интегрирований.

Эту теорему можно впрочем формулировать и так: если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой прямоугольной области, то в этой области можно выполнить интегрирование интеграла

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

по параметру y , интегрируя по параметру y под знаком интеграла, т. е. интегрируя сперва по y , а затем по x . Эта теорема вполне соответствует правилу дифференцирования интеграла по параметру, выведенному в § 1.

Еще одно следствие мы получим, если будем рассматривать один из верхних пределов, например b , как переменный параметр. Мы можем тогда дифференцировать интеграл, взятый по области, по этому параметру и получим согласно основным теоремам дифференциального и интегрального исчисления результат:

$$\frac{\partial}{\partial b} \iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^{\beta} f(b, y) dy;$$

подобным же образом, рассматривая β как переменный параметр, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b f(x, \beta) dx.$$

Наконец из каждого из этих двух равенств получаем, дифференцируя еще раз, соотношение:

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta} \iint_0^f f(x, y) dx dy = f(\beta, \beta).$$

Иными словами: дифференцирование нашего интеграла по одному из верхних пределов приводит к обыкновенному интегралу по соответствующей стороне прямоугольника; смешанное дифференцирование по обоим верхним пределам дает значение функции в соответствующей вершине прямоугольника ¹⁾.

Теорема об изменении порядка интегрирования имеет многочисленные применения. В качестве примера вычислим интеграл

$$J = \int_0^{\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (b > a > 0)$$

Удобно вместо x и y ввести новые переменные $\xi = e^{-ax}$ и $\eta = \frac{y}{a}$; тогда несобственный интеграл переходит в интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} \int_1^{\frac{b}{a}} \xi^{\eta} d\eta = \int_0^1 d\xi \int_1^{\frac{b}{a}} \xi^{\eta-1} d\eta$$

Теорема об изменении пределов интегрирования дает:

$$J = \int_1^{\frac{b}{a}} d\eta \int_0^1 \xi^{\eta-1} d\xi = \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{d\eta}{\eta} = \log \frac{b}{a}.$$

Таким образом имеем:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}.$$

3. Распространение результата на области более общего характера. Распространение полученного для прямоугольных областей результата на области более общего вида не представляет ни малейших затруднений и не нуждается в особом доказательстве.

Рассмотрим сперва выпуклую область G , т. е. такую область, граница которой пересекается любой прямой не более чем в двух точках; при этом

¹⁾ Обращаем внимание читателя на связь этой формулы с теоремой о возможности изменять порядок дифференцирования (стр. 57) и рекомендуем продумать, в какой мере эти два предложения можно считать эквивалентными друг другу.

мы однако допускаем, что среди линий, составляющих границу области, встречаются и прямые линии. Пусть область G заключается между опорными прямыми (т. I, стр. 229) $x = x_0$, $x = x_1$ и $y = y_0$, $y = y_1$. Так как для точек области G изменяется в интервале $x_0 \leq x \leq x_1$, а y — в интервале $y_0 \leq y \leq y_1$, мы рассмотрим теперь интегралы

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$$

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy,$$

которые берутся вдоль отрезков, по которым прямые $y = \text{const}$ или $x = \text{const}$ пересекаются с нашей областью; при этом $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ обозначают абсциссы точек пересечения прямых $y = \text{const}$ с границей нашей области, а $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ обозначают ординаты точек пересечения прямых $x = \text{const}$ с границей области. Интеграл

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$$

является следовательно функцией параметра y , причем параметр y входит не только под знак интеграла, но и в верхний и нижний предел. То же имеет место и для интеграла

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy,$$

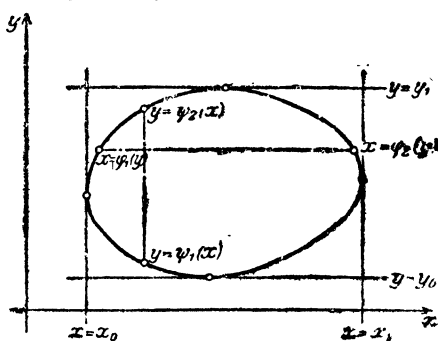
рассматриваемого как функция от x . Теперь выражение в виде двойного интеграла дается равенствами:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy.$$

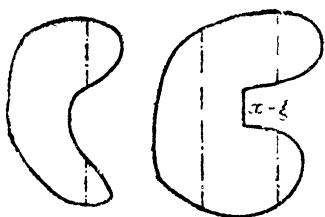
Доказательство ничем не отличается от доказательства, которое было дано в частном случае прямоугольной области.

Совершенно аналогично обстоит дело и в том случае, если откажемся от требования, чтобы область была выпуклой, и будем рассматривать области вроде изображенных на черт. 61. При этом мы относительно кривых, ограничивающих область, будем только предполагать, что они пересекаются



Черт. 60.

с любой прямой, параллельной оси x или оси y , в конечном числе точек, и будем понимать под $\int f(x, y) dy$ сумму интегралов от функции $f(x, y)$



Черт. 61.

при постоянном x , распространенных на все интервалы, которые соответствующая прямая $x = \text{const}$ вырезывает в замкнутой области. Число таких интервалов для невыпуклых областей будет, вообще говоря, больше единицы. Это число может для некоторого значения x , как это изображено на черт. 61, измениться скачком так, чтобы при этом и значение интеграла $\int f(x, y) dy$ в этой точке претерпевало

конечный разрыв. Но выражение интеграла, взятого по области, в виде двойного интеграла

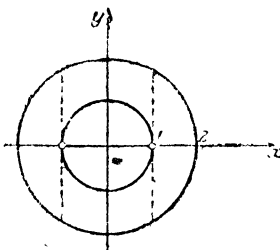
$$\iint_G f(x, y) dg = \int dx \int f(x, y) dy,$$

где интегрирование по x надо произвести вдоль всего интервала от x_0 до x_1 , остается справедливым и в этом случае, причем в доказательстве ничего не изменяется. Ясно, что имеет место и равенство:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int dy \int f(x, y) dx.$$

Если например область интегрирования есть круг $x^2 + y^2 \leq 1$, то наше разложение будет иметь вид:

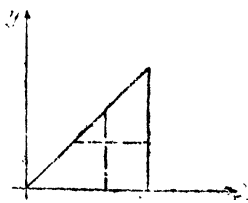
$$\iint_G f(x, y) dg = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy,$$



Черт. 62.

Если областью является круговое кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, то

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy = & \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \\ & + \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^{+1} dx \int_{+\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$



Черт. 63.

В качестве последнего примера рассмотрим треугольную область, ограниченную прямыми $x = y$, $y = 0$ и $x = a$ ($a > 0$). Интегрируя сначала по y , имеем:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy,$$

а интегрируя сперва по x , получим:

$$\iint_G f(x, y) dg = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx.$$

Сравнивая эти два результата, находим:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx.$$

Если в частности $f(x, y)$ зависит только от y , то наша формула дает:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^a f(y) (a - y) dy.$$

Отсюда видим: если неопределенный интеграл

$$\int_0^x f(y) dy$$

от функции $f(x)$ еще раз проинтегрировать, то результат может быть выражен в виде простого интеграла (см. также стр. 175).

4. Распространение результатов на многомерные области. Ввиду далеко идущей аналогии с предыдущим я могу здесь ограничиться только сообщением фактов, не приводя доказательств. Рассматривая сперва опять прямоугольную область $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$ и определенную в этой области непрерывную функцию $f(x, y, z)$, мы можем вычисление интеграла по трехмерной области

$$V = \iiint_G f(x, y, z) dg$$

привести различными способами к вычислению обыкновенных интегралов и интегралов, взятых по двумерной области, так например:

$$\iiint_G f(x, y, z) dg = \int_{z_0}^{z_1} dz \iint_R f(x, y, z) dx dy.$$

При этом

$$\iint_R f(x, y, z) dx dy$$

есть интеграл, взятый по прямоугольной двумерной области $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, от функции $f(x, y, z)$, в которой z имеет при этом интегрировании постоянное значение и рассматривается как параметр, а потому интеграл по двумерной области является функцией параметра z . Подобным же образом мы можем выделить и остальные две координаты x и y .

Далее мы можем интеграл V представить и в виде тройного интеграла, т. е. вычислить с помощью трех последовательных обыкновенных интегрирований, а именно мы рассматриваем сначала выражение

$$\int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) dz$$

при постоянных значениях x и y , затем выражение

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) dz$$

при постоянном x ; тогда:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) dz.$$

Само собой разумеется, что мы могли бы с таким же успехом интегрировать сперва по x , затем по y и наконец по z , или имели бы право как угодно изменить порядок интегрирований, так как тройной интеграл каждый раз совпадает с интегралом, взятым по трехмерной прямоугольной области. Имеем следовательно теорему: тройной интеграл от непрерывной в трехмерной замкнутой области функции не зависит от порядка интегрирований.

Нет надобности конечно для случая трех измерений опять излагать, как производится разложение для непрямоугольных областей. Ограничусь тем, что напишу это разложение для шаровой области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$:

$$\iiint_G f(x, y, z) dg = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

§ 4. Преобразование интегралов, взятых по области.

При изучении обыкновенных интегралов мы видели, что введение новой переменной служит средством для преобразования и упрощения интегралов. Подобным же образом и в случае многих переменных такая замена играет большую роль. Правда, вычисление интегралов, взятых по области, несмотря на то, что оно приводится к вычислению обыкновенных интегралов, обычно еще труднее и еще реже выполняется с помощью элементарных функций, чем в случае одной переменной, но все же в некоторых случаях удается произвести такое вычисление, после того как вместо прежних переменных вводят под знак интеграла новые переменные. Однако независимо от вопроса о вычислении интегралов, взятых по области преобразование их к новым переменным имеет важное принципиальное значение, так как с точки зрения теории преобразования глубже выясняется понятие интеграла.

1. Введение полярных координат в плоскости. Начнем с важнейшего частного случая, именно введем полярные координаты r и ϑ в плоскости

x, y с помощью уравнений $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$. Преобразование интеграла

$$\iint_G f(x, y) dg,$$

взятого по области G , к полярным координатам можно произвести почти непосредственно, исх. для из первоначального определения интеграла, взятого по области; в сущности это преобразование уже выполнено в § 2, п° 2 и п° 3. Мы тотчас же получим это преобразование, если разобьем область G на частичные области не с помощью прямых, параллельных осям координат, а если выберем где-либо начало координат, например так, как это сделано на черт. 58, и произведем разбиение с помощью прямых $\vartheta = \text{const}$ и окружностей $r = \text{const}$. Пусть соответствующие углы будут $\vartheta_1 = h$, $\vartheta_2 = 2h, \dots, \vartheta_n = nh = 2\pi$ а соответствующие радиусы окружностей $r_1 = k, \dots, r_m = mk$. Тогда площадь частичной области, ограниченной лучами ϑ_ν и $\vartheta_{\nu+1}$ и окружностями радиусов r_μ и $r_{\mu+1}$, равна:

$$\frac{r_{\mu+1}^2 - r_\mu^2}{2} (\vartheta_{\nu+1} - \vartheta_\nu) = \frac{1}{2} (r_{\mu+1} + r_\mu) h k.$$

В таком случае наш интеграл можно рассматривать как предел суммы

$$\sum_\mu \sum_\nu f(r_\mu \cos \vartheta_\nu, r_\mu \sin \vartheta_\nu) r_\mu h k,$$

когда величины h и k одновременно стремятся к нулю. При этом мы полагаем $r_\mu = \frac{r_\mu + r_{\mu+1}}{2}$ и выбираем для частичной области, заключенной между лучами ϑ_ν и $\vartheta_{\nu+1}$ и окружностями радиусов r_μ и $r_{\mu+1}$ значение функции в точке r_μ, ϑ_ν . Нашу сумму можно распространить на все те значения ν и μ , для которых соответствующие площадки лежат внутри области G . Мы теперь непосредственно видим на основании наших рассуждений о приведении интеграла по области к обыкновенным интегралам, что сумма переходит при этом в двойной интеграл с независимыми переменными r и ϑ , распространенный на ту область интегрирования G^* в плоскости прямоугольных координат r и ϑ , которая получается из области G путем преобразования

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta.$$

Однако новая подынтегральная функция не есть $f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$, а получается из нее путем умножения на r ; иными словами, мы получаем формулу преобразования:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr d\vartheta.$$

Такое преобразование к полярным координатам всегда применяется в том случае, когда функция $f(x, y)$ или область G могут быть проще

представлены в полярных координатах, чем в прямоугольных, например если функция $f(x, y)$ может быть представлена как функция расстояния r от постоянной точки (начала координат) или если область интегрирования является круг.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$J = \iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

причем область G есть круг

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

радиуса R . Непосредственное вычисление этого интеграла посредством последовательного интегрирования по x и y с помощью элементарных функций невыполнимо. Если же мы введем полярные координаты с полюсом в начале, то интеграл перейдет в

$$J = \iint_{G^*} e^{-r^2} r dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R e^{-r^2} r dr.$$

Этот интеграл мы можем теперь легко вычислить, интегрируя сперва по ϑ , а затем по r . Интегрирование по ϑ выполняется непосредственно, так как подынтегральная функция совсем не зависит от ϑ , и дает множитель 2π . Интегрирование по r выполняется с помощью подстановки $r^2 = u$, и мы таким образом окончательно получаем формулу:

$$J = \pi \int_0^{R^2} e^{-u} du = -\pi e^{-u} \Big|_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

2. Общая формула преобразования в случае двух независимых переменных ¹⁾. Принципиально важное значение имеет изучение теории преобразования интегралов, взятых по области, для случая общих преобразований. Рассмотрим сначала интеграл

$$\iint_G f(x, y) dg = \iint_G f(x, y) dx dy,$$

распространенный по области G плоскости x, y . Пусть область эта отоображается с помощью функций:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \end{aligned}$$

одно-однозначным образом на замкнутую область G^* плоскости u, v , причем мы предполагаем, что функции φ и ψ имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и что их функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v$$

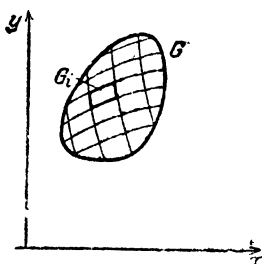
¹⁾ См. по этому поводу также гл. V, § 3, п. 2.

во всей замкнутой области G^* нигде не обращается в нуль, а имеет повсюду, скажем, положительные значения. Тогда мы знаем, что оба семейства кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ покрывают область G в виде сетки, так как в силу нашего допущения систему функций $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ можно во всей области G однозначно обратить с помощью системы функций

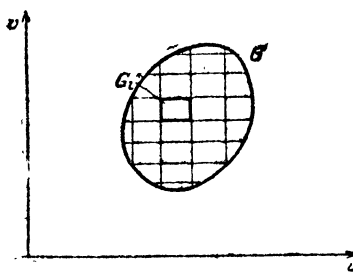
$$u = g(x, y), \quad v = h(x, y).$$

Нетрудно при помощи наводящего рассуждения составить себе представление о том, как можно интеграл

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy$$



Черт. 64.



Черт. 65.

выразить через интеграл, в который входят переменные u и v . В самом деле естественно вычислить интеграл

$$\iint_G f(x, y) \, dg,$$

исходя из разбиения области G не на прямоугольники, а на частичные области G_i , образуемые сетью кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Для этого мы должны рассматривать например значения $u = \nu h$, $v = \mu k$, где $h = \Delta u$ и $k = \Delta v$ данные числа, а ν и μ те целые числа, при которых соответствующие точки принадлежат области G . Эти кривые, пересекаясь, определяют ряд площадок, имеющих вид криволинейных параллелограмов; те из них, которые лежат целиком внутри области G , мы примем за частичные области G_i . Следовательно теперь все сводится к тому, чтобы определить площадь такого криволинейного четырехугольника (параллелограмма).

Если бы площадка была ограничена не кривыми линиями, а была прямолинейным параллелограмом, одна половина которого представляет треугольник с вершинами, соответствующими значениям (u_ν, v_μ) , $(u_\nu + h, v_\mu)$ и $(u_\nu, v_\mu + k)$, то площадь параллелограмма по формуле элементарной аналитической геометрии (гл. I, § 2) выражалась бы определителем:

$$\begin{vmatrix} \varphi(u_\nu + h, v_\mu) - \varphi(u_\nu, v_\mu) & \varphi(u_\nu, v_\mu + k) - \varphi(u_\nu, v_\mu) \\ \psi(u_\nu + h, v_\mu) - \psi(u_\nu, v_\mu) & \psi(u_\nu, v_\mu + k) - \psi(u_\nu, v_\mu) \end{vmatrix},$$

или приближенно в виде:

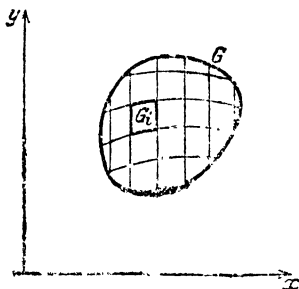
$$\left| \begin{matrix} \varphi_u(u_v, v_v) & \varphi_v(u_v, v_v) \\ \psi_u(u_v, v_v) & \psi_v(u_v, v_v) \end{matrix} \right| h k = h k D.$$

Умножая эти выражения на значения функции в соответствующих площадках и суммируя по всем частичным областям G_i , лежащим целиком внутри области G , мы путем перехода к пределу при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ получаем выражение:

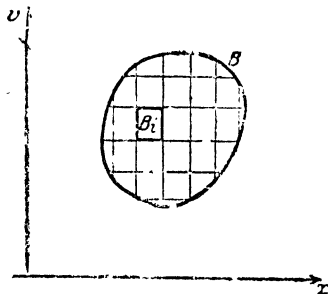
$$\iint_{G^*} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] D du dv,$$

для интеграла, преобразованного к новым переменным.

Однако наше рассуждение еще недостаточно, так как мы не доказали, что замена криволинейных площадок параллелограммами и дальнейшая замена площади такого параллелограмма выражением $(\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v) h k$ являются законными, т. е. что получающиеся отклонения в пределе, при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$, исчезают. Вместо того, чтобы проделать оценки, необходимые для усовер-



Черт. 65.



Черт. 67.

шенствования этого способа доказательства, мы проведем доказательство формулы преобразования несколько иным способом, который можно будет затем применить и к областям большого числа измерений.

С этой целью представим себе (гл. III, § 3, п° 5), что наше преобразование независимых переменных x и y к новым переменным u, v происходит не сразу, а постепенно; именно, мы сперва вместо переменных x и y вводим новые переменные x и v при помощи равенств

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= \Phi(x, v). \end{aligned}$$

При этом мы предполагаем, что выражение Φ_v отлично от нуля во всей области G , например, что $\Phi_v > 0$ во всей области, и что вся область G взаимно однозначно отображается на область B в плоскости x, v . Пусть эта область B в свою очередь одно-однозначно отображается при помощи равенств:

$$\begin{aligned} x &= \Psi(u, v), \\ v &= v, \end{aligned}$$

на область G^* в плоскости u, v , причем мы опять предполагаем, что выражение Φ_u имеет положительные значения во всей области B . Теперь произведем преобразование нашего интеграла также в два приема. Начнем с разбиения области B на прямоугольные частичные области, длина сторон которых $\Delta x = h$ и $\Delta v = k$, с помощью прямых $x = \text{const} = x_v$ и $v = \text{const} = v_u$ в плоскости x, v . Этому разбиению плоскости B соответствует в области G разбиение на частичные области G_i , ограниченные двумя параллельными прямыми $x = x_v$ и $x = x_v + h$ и двумя дугами кривых $y = \Phi(v_u, x)$ и $y = \Phi(v_u + k, x)$. Площадь этой области G_i на основании элементарного определения обыкновенного интеграла равна:

$$\Delta G_i = \int_{x_v}^{x_v+h} [\Phi(v_u + k, x) - \Phi(v_u, x)] dx;$$

следовательно по теореме о среднем значении в интегральном исчислении имеем:

$$\Delta G_i = h [\Phi(v_u + k, \bar{x}_v) - \Phi(v_u, \bar{x}_v)],$$

где \bar{x}_v означает некоторое промежуточное значение между x_v и $x_v + h$. Наконец по теореме о среднем значении в дифференциальном исчислении имеем:

$$\Delta G_i = hk \Phi_v(\bar{v}_u, \bar{x}_v),$$

где \bar{v}_u означает число, заключенное между v_u и $v_u + k$.

Таким образом \bar{x}_v и \bar{v}_u представляют координаты точки, лежащей в соответствующей площадке области B . Наш интеграл, распространенный на область G , представляет следовательно предел суммы

$$\sum \Delta G_i f_i = \sum h k f[\bar{x}_v, \Phi(\bar{v}_u, \bar{x}_v)] \Phi_v(\bar{v}_u, \bar{x}_v)$$

при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$, и мы видим из выражения, стоящего в правой части, непосредственно, что оно в пределе переходит в

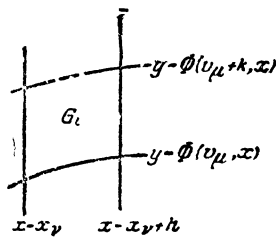
$$\iint_B f(x, y) \Phi_v dx dv \quad [y = \Phi(v, x)],$$

взятый по области B . Итак получаем:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_B f(x, y) \Phi_v dx dv.$$

Теперь применим к интегралу, стоящему в правой части, те же рассуждения, которые мы применили к интегралу

$$\iint_G f(x, y) dx dy,$$



Черт. 68.

причем теперь мы преобразовываем область B с помощью преобразования $x = \Psi(u, v)$, $v = v$ в область G^* .

В таком случае интеграл, взятый по области B , перейдет в интеграл, взятый по области G^* , в котором подынтегральная функция имеет вид $f\Phi_v\Psi_u$, и мы окончательно получаем:

$$\iint_{G^*} f(x, y) \Phi_v \Psi_u du dv,$$

при этом величины x и y должны быть выражены через независимые переменные u и v так, как это следует из двух предыдущих преобразований. Таким образом мы доказали формулу преобразования

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(x, y) \Phi_v \Psi_u du dv.$$

Эту формулу мы можем, вводя прямое преобразование $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, привести к указанному ранее виду. В самом деле: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \Phi_v \Psi_u$ и $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \Psi_u \Phi_v$, следовательно на основании главы III, § 3, п° 5, имеем:

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \Phi_v \Psi_u.$$

Таким образом наша формула преобразования доказана для всех тех случаев, когда преобразование $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ может быть разложено на два примитивные преобразования вида $x = x, y = \Phi(v, x)$ и $v = v, x = \Psi(u, v)$ ¹).

Но в главе III, § 3, мы видели, что замкнутую область можно разбить на конечное число областей, в каждой из которых возможно разложение общего преобразования на два примитивных. Таким образом вообще²) приходим к следующему результату. Если замкнутая область G отображается с помощью преобразования $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ с непрерывными частными производными первого порядка и повсюду положительным функциональным

¹) Правда, мы раньше предполагали, что обе производные Φ_v и Ψ_u имеют положительное значение, но легко видеть, что это не является ограничением. В самом деле, в силу того, что $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, обе производные должны непременно иметь одинаковые знаки. Если обе производные отрицательны, то достаточно лишь заменить x через $-x$ и y через $-y$, что согласно нашему определению не изменяет величины интеграла. Тогда оба примитивные преобразования будут иметь положительные функциональные определители.

²) Правда, рассуждения в том месте относились лишь ко всякой замкнутой области G' , целиком лежащей внутри области G но так как область G' может сколь угодно мало отличаться от G , то формула преобразования имеет место и для области G .

определителем $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \varphi_u \phi_v - \phi_u \varphi_v$ одно-однозначно на область G^* плоскости u, v , то справедлива формула:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f[\varphi(u, v), \phi(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

В дополнение заметим, что формула преобразования остается справедливой и в том случае, когда определитель $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ обращается в нуль в конечном числе точек области, не изменяя при этом знака. Для доказательства нам достаточно только исключить эти точки из области G с помощью маленьких кругов радиуса ρ ; тогда наша формула справедлива для получающейся таким образом области; если заставим теперь ρ стремиться к нулю¹⁾, то, в силу непрерывности всех встречающихся функций, получим, что формула преобразования справедлива и для области G .

Этим замечанием, приходится пользоваться при введении полярных координат в том случае, когда полюс лежит внутри области, так как в полюсе функциональный определитель, равный r , обращается в нуль.

К преобразованиям с отрицательным функциональным определителем мы еще вернемся в главе V, § 3; мы увидим, что в основном рассуждения не изменяются. Здесь же заметим, что условие $D > 0$ при функциональном определителе, не обращающемся в нуль, не представляет ограничения общности, поскольку мы можем, меняя ролями u и v , изменить знак D на обратный.

3. Области, число измерений которых больше двух. Подобным же образом мы можем конечно поступить и в случае областей с большим числом измерений, например в случае трехмерных областей, и получаем следующий общий результат: если замкнутая область G пространства x, y, z, \dots отображается с помощью одно-однозначного преобразования с повсюду положительным функциональным определителем

$$\frac{\partial(x, y, z, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)}$$

на область G^* пространства u, v, w, \dots , то имеет место формула преобразования:

$$\begin{aligned} & \iiint \dots \int_G f(x, y, z, \dots) dx dy dz \dots = \\ & = \iiint \dots \int_{G^*} f(x, y, z, \dots) \frac{\partial(x, y, z, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)} du dv dw \dots \end{aligned}$$

При этом в случае n измерений функциональный определитель представляет определитель n -го порядка, составленный из частных производных аналогично случаю $n=2$.

¹⁾ Вообще относительно этого приема доказательства см. § 5.

В качестве примера применения этой формулы мы можем снова получить формулу преобразования к полярным координатам. В случае плоских полярных координат мы должны только вместо u и v писать r и ϑ , и непосредственно получаем для функционального определителя выражение $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \vartheta)} = r$, что совпадает с результатом, полученным в п^о 1. В случае пространственных полярных координат, которые определяются формулами:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \vartheta, \\y &= r \sin \varphi \sin \vartheta, \\z &= r \cos \vartheta,\end{aligned}$$

причем φ изменяется в пределах от 0 до 2π , а ϑ — от 0 до π , в то время как r может принимать все значения от 0 до ∞ , — мы должны отождествить u, v, w с r, ϑ и φ и получаем для функционального определителя выражение:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta.$$

(Значение $r^2 \sin \vartheta$ проще всего получить разложением по элементам третьего столбца.) Преобразование к пространственным полярным координатам дает, следовательно, формулой:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f(x, y, z) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Эту формулу можно впрочем получить совершенно так же, как соответствующую формулу в плоскости, и без помощи общей теории. Для этого достаточно только произвести разбиение пространства на частичные области с помощью шаровых поверхностей $r = \text{const}$, конических поверхностей $\vartheta = \text{const}$ и полуплоскостей $\varphi = \text{const}$. Проведение этого элементарного геометрического вывода по образцу п^о 1 можно предоставить читателю.

В случае пространственных полярных координат при $r = 0$ и $\vartheta = 0$ формулированные раньше условия не выполнены, так как функциональный определитель тогда равен нулю. Но справедливость нашей формулы преобразования не нарушается; убедиться в этом можно приемом, совершенно аналогичным тому, каким мы пользовались в случае плоской области.

§ 5. Несобственные интегралы¹⁾.

Уже в случае функций от одной переменной мы были вынуждены распространить понятие интеграла на такие функции, которые не являются непрерывными в замкнутой области интегрирования, а именно мы рассматривали интегралы от прерывных функций, имеющих точки разрыва 1-го рода или принимающих бесконечные значения, а также интегралы, распространенные на бесконечные промежутки интегрирования. Мы теперь должны и в случае

¹⁾ Этот параграф можно при первом чтении пропустить.

функций от многих переменных соответствующим образом обобщить понятие интеграла.

1. Функции с конечными разрывами. Для функций, имеющих в области интегрирования G только точки разрыва первого рода, распространение понятия интеграла ясно само собой. Мы предположим, что область интегрирования может быть разбита посредством конечного числа гладких¹⁾ криволинейных дуг на конечное число частичных областей G_1, G_2, \dots, G_n таким образом, чтобы подынтегральная функция f была непрерывна внутри каждой частичной области, а при приближении к границе этой частичной области изнутри функция стремилась к определенным предельным значениям; эти предельные значения, которые мы получаем при приближении к точкам линии, отделяющей две частичные области, могут быть различны между собой, когда мы приближаемся к линии раздела с одной стороны или с другой стороны. Тогда под интегралом от функции f , распространенным на область G , разумеют сумму интегралов от функции f , взятых по частичным областям G_v , причем эти последние интегралы непосредственно подходят под наше первоначальное определение интеграла, если только мы представим себе каждый раз функцию f дополненной соответствующими значениями ее на границе до непрерывной функции в замкнутой области G_v .

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x, y)$, которая в квадрате

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

определена равенствами:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1, \text{ если } y < x, \\ f(x, y) &= 2, \text{ если } y > x \end{aligned}$$

Для этой функции прямая $y = x$ является линией разрыва, и мы согласно нашему определению получаем для несобственного интеграла

$$\iint f(x, y) dx dy,$$

взятого по области указанного квадрата, значение $\frac{3}{2}$.

2. Функции, обращающиеся в бесконечность в изолированных точках. Если функция, которую требуется проинтегрировать, обращается в бесконечность в единственной точке P области интегрирования, то мы аналогично случаю одной независимой переменной для определения интеграла применяем следующий прием: ограничим вокруг точки разрыва P окрестности U , так, чтобы остающиеся замкнутые области $G_v = G - U$ уже не содержали точки P . Можно самыми разнообразными способами указать последовательность таких окрестностей U_v , диаметры которых с возрастанием v стремятся к нулю, например последовательность кругов или шаров с центром в точке P и радиусами $c = \frac{1}{v}$. Если теперь последовательность интегралов, взятых по области G_v , стремится к пределу J , т. е.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \iint_{G_v} f(x, y) dg = J,$$

¹⁾ Под гладкой дугой разумеют дугу с непрерывно изменяющейся касательной.

и если предел этот не зависит от специального выбора последовательности Q_n , то этот предел и называют интегралом, или точнее несобственным интегралом, от функции f , взятым по области G , и пишут:

$$J = \iint f(x, y) dg.$$

Иногда этот интеграл называют также сходящимся интегралом.

Если предел J не существует, то интеграл называют расходящимся. Наше определение остается, разумеется, в силе и в том случае, когда точка P является изолированной точкой неопределенности функции, как например начало координат для функции $\sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$. В этом случае интеграл всегда будет сходящимся, если только функция в окрестности точки P остается по абсолютному значению меньше некоторого постоянного числа.

Общее условие сходимости интеграла мы можем поэтому формулировать также следующим образом. Любому наперед заданному положительному числу ε соответствует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что удовлетворяется следующее условие: если U и U' означают какие угодно две (открытые) частичные области из области G , содержащие внутри точку P , в которой функция становится бесконечной и диаметры которых меньше δ , то разность интегралов, распространенных соответственно на области $G - U$ и $G - U'$, по абсолютному значению меньше ε .

Разъясним это понятие на нескольких примерах.

Функция

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

обращается в начале координат в бесконечность. Поэтому мы должны для того, чтобы вычислить интеграл, взятый по области G , содержащей начало координат, например по кругу $x^2 + y^2 \leq 1$, выделить начало с помощью области U_δ , диаметр которой меньше δ , и исследовать сходимость интеграла, взятого по остающейся области $G_\delta = G - U_\delta$, когда δ стремится к нулю. Преобразуем интеграл к полярным координатам (§ 4, п° 1), получим:

$$\iint_{G_\delta} \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{G_\delta} r \log r dr d\vartheta,$$

где интеграл в правой части взят по области G_δ плоскости r, ϑ , соответствующей области G_δ , следовательно в нашем случае по области прямоугольника $\delta \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, который не доходит до прямой $r = 0$. Но функция $r \log r$ при $r = 0$ непрерывна, если только припишем ей в этой точке значение нуль, так как

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \log r = 0.$$

Мы можем поэтому приближать δ неограниченно к нулю и рассматривать преобразованный интеграл

$$\iint_{G_\delta} r \log r dr d\vartheta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{G_\delta} r \log r dr d\vartheta$$

как обыкновенный интеграл в смысле § 2. Тем самым сходимость интеграла доказана.

Вместе с тем этот пример обнаруживает, как это мы видели и в случае одной независимой переменной, что иногда можно путем подходящего преобразования координат превратить несобственный интеграл в собственный. Этот факт ясно указывает на то, какие недопустимые ограничения при оперировании с интегралами пришлось бы ввести, если бы мы не рассматривали несобственных интегралов.

В качестве следующего примера рассмотрим интеграл

$$\iint_G \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha},$$

взятый по той же области. Представим себе и в данном случае, что мы берем сперва интеграл по области G_δ , которая получается из G вырезанием круга $0 \leq r < \delta$.

Преобразуя к полярным координатам, получаем:

$$\iint_{G_\delta} \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr d\varphi,$$

или в виде двойного интеграла:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_\delta^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = 2\pi \int_\delta^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}}.$$

Но в первом томе (стр. 212 и 213) мы видели, что несобственный интеграл

$$\int_0^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$$

сходится в том и только в том случае, когда $\alpha < 2$. Отсюда мы заключаем, что наш интеграл по области

$$\iint_G \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha}$$

сходится в том и только в том случае, если выполнено условие $\alpha < 2$. Как и в предыдущем примере, сходимость не зависит от специального выбора частичных областей U_δ .

Наши замечания можно просто использовать для вывода часто применяющегося общего достаточного (но не необходимого) признака сходимости несобственных интегралов, взятых по области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках замкнутой области G за исключением точки P , например начала координат $x=0, y=0$, в которой функция обращается в бесконечность,

и если существуют постоянное число M и положительное число $\alpha < 2$ такие, что во всей области G имеет место неравенство

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha},$$

то интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

будет сходящимся.

Доказательство получается на основании предыдущего непосредственно, если принять во внимание соотношения:

$$\left| \iint_B f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_B |f(x, y)| dx dy \leq M \iint_B \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha},$$

где B есть область, не содержащая точки P , заключающаяся внутри малой круговой окрестности точки P .

Подобным же образом можно поступить и в случае тройного интеграла:

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\alpha}.$$

Если область G содержит в себе начало координат, то, вводя полярные координаты, получим:

$$\iiint_{G'} \frac{1}{r^{\alpha-2}} \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Рассуждение, совершенно аналогичное предыдущему, доказывает, что интеграл сходится, если $\alpha < 3$. В качестве общего критерия получаем: интеграл от функции $f(x, y, z)$, обращающейся в бесконечность в начале координат и непрерывной во всех остальных точках области G (содержащей начало координат), сходится, если существуют постоянное число M и положительное число $\alpha < 3$, такие, что повсюду в области

$$|f(x, y, z)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\alpha}.$$

Из наших критериев следует, что интегралы вида

$$\iint_G \frac{dx dy}{[V(x-a)^2 + (y-b)^2]^\alpha} \quad (\alpha < 2),$$

взятые по области двух измерений, и интегралы вида

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{[V(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^\alpha} \quad (\alpha < 3),$$

взятые по области трёх измерений, сходятся; при этом (a, b) или (a, b, c) есть определенная точка, лежащая в области G . Чтобы применить наши критерии, мы должны только сделать точку началом координат путем параллельного перенесения осей координат.

3. Функции, обращающиеся в бесконечность вдоль линии. Если функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность не только в отдельных точках, но и вдоль некоторых линий C области G , то мы можем для определения интеграла от функции f по области G поступить совершенно таким же образом, как и раньше. Мы выделяем линии разрыва C из области G , окружая их областью U_ε , площадь которой меньше ε . Если теперь, при $\varepsilon \rightarrow 0$, независимо от специального выбора областей U_ε , интегралы от функции f по области $G - U_\varepsilon$ стремятся к пределу J , то интеграл от функции f по области G называется сходящимся, и предел J называют значением этого интеграла.

Простейший пример представляет тот случай, когда линия C есть прямая линия, например отрезок оси y . Если повсюду в области G имеет место соотношение:

$$|f(x, y)| < \frac{M}{x^\alpha},$$

где M — постоянное число, а положительное число α меньше единицы, то интеграл, взятый по области G , сходится. Доказательство проводится вполне аналогично доказательствам в предыдущем номере, например путем выделения оси y из области посредством параллельных прямых.

4. Бесконечная область интегрирования. Если область интегрирования G простирается в бесконечность, то ее исчерпывают последовательностью частичных областей $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$, каждая из которых конечна и которые обладают тем свойством, что каждая ограниченная частичная область нашей области G лежит внутри всех областей G_n при $n > m$, где m — некоторое определенное число. (Если например G представляет всю плоскость, то мы можем за область G принять круг радиуса r с центром в начале координат.) Если существует предел интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x, y) \, dg$$

и если при этом предел не зависит от специального выбора последовательности частичных областей G_n , то мы его естественно называем интегралом функции f , взятым по области G . Для того чтобы пояснить это на примере, рассмотрим интеграл

$$\iint_G e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy,$$

где областью интегрирования G является вся плоскость x, y . Чтобы обнаружить сходимость этого интеграла, выберем в качестве частичных областей G_n сперва круги K_n радиусов n :

$$x^2 + y^2 \leq n^2,$$

которые, очевидно, удовлетворяют поставленным требованиям; следовательно надо найти предел интеграла:

$$\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

при $\nu \rightarrow \infty$. Но этот интеграл мы уже вычислили (стр. 200) и нашли значение $\pi(1 - e^{-\nu^2})$. В таком случае имеем:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-\nu^2}) = \pi.$$

Если мы еще покажем, что не только последовательность кругов, но и всякая другая последовательность частичных областей G , обладающая указанными свойствами, приводит к тому же пределу π , то, согласно определению, число π и будет значением несобственного интеграла.

Итак пусть задана любая последовательность областей такого рода G_1, G_2, \dots . Эти области, согласно условию, должны, начиная с достаточно большого ν , содержать в себе всякий круг K_m . С другой стороны, всякая область G_ν ограничена, следовательно сама содержится в круге K_M достаточно большого радиуса M . Так как подынтегральная функция $e^{-x^2-y^2}$ повсюду положительна, то отсюда следует, что

$$\iint_{K_m} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{G_\nu} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{K_M} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

С возрастанием m и M интегралы, взятые по K_m и K_M , стремятся к общему пределу π , следовательно и интеграл по области G_ν должен стремиться к тому же пределу. Этим доказано, что данный интеграл сходящийся и имеет значение π .

Особенно интересный результат получается, если взять за области G_ν квадраты $|x| \leq \nu, |y| \leq \nu$. В самом деле, тогда вычисление интеграла

$$\iint e^{-x^2-y^2} dx dy$$

приводится к двум последовательным интегрированиям (§ 3):

$$\iint_{G_\nu} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\nu}^{\nu} e^{-x^2} dx \int_{-\nu}^{\nu} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\nu}^{\nu} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(2 \int_0^{\nu} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Увеличивая неограниченно число ν , мы должны получить тот же предел π . Следовательно

$$\left(2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi,$$

или

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

что совпадает с результатом, полученным раньше (т. I, гл. VIII, стр. 364).

5. Общие замечания и дополнения. Полезно резюмировать еще раз с общей точки зрения все основные понятия этого параграфа. Наше расширение понятия интеграла на случай, когда определения, данные в § 2, непосредственно не приложимы, основано на том, что мы рассматриваем

значение интеграла как предел последовательности интегралов, взятых по областям G_ν , которые с возрастанием ν , как говорят, исчерпывают область интегрирования G . Ввиду этого область G рассматривают уже не как замкнутую, а как открытую область, причем все точки прерывности относятся к границе области и границу не включают в область G . Говорят, что область G исчерпывается последовательностью замкнутых областей $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$, если все замкнутые области G_n лежат в области G и если любая замкнутая частичная область, лежащая целиком внутри G , является также частичной областью областей G_n , если только значение n взято достаточно большим. Если в частности частичные области G_n таковы, что каждая последующая содержит внутри себя предыдущую, то говорят, что эти области монотонно сходятся к области G .

К частичным областям G_n мы можем непосредственно применить основное определение интеграла, приведенное в § 2, и мы говорим, что интеграл от функции f по области G сходится, если интеграл по области G_n стремится к пределу, не зависящему от специального выбора последовательности областей G_n . Полезно вообще ясно представить себе следующие факты, которые подтверждаются также на разобранных выше примерах.

Во-первых. Если функция f не принимает в области G отрицательных значений, то достаточно допустить, что последовательность интегралов

$$\int_{G_\nu} f(x, y) dx dy$$

сходится для одной монотонной последовательности областей G_ν , чтобы быть уверенным в том, что к тому же пределу сходится последовательность интегралов для любой последовательности G'_ν . В самом деле G'_ν , как замкнутая область, лежащая целиком внутри G , содержится во всех областях G_n , начиная с некоторого $n(\nu)$. Всякая область G'_n в свою очередь содержится по тем же причинам в некоторой области G_m . Так как функция f по условию нигде не принимает отрицательных значений, то имеют место неравенства:

$$\iint_{G_\nu} f(x, y) dx dy \leq \iint_{G_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{G_m} f(x, y) dx dy.$$

Но с возрастанием ν оба крайние интеграла стремятся к одному и тому же пределу, следовательно и последовательность интегралов

$$\iint_{G'_n} f(x, y) dx dy$$

должна сходиться к тому же пределу, что и требовалось доказать.

В частности из этой теоремы следует, что интеграл по области G от функции f , не принимающей в этой области отрицательных значений, схо-

дится, если только все интегралы взятые по областям G_v , образующим монотонную последовательность частичных областей, стремящихся к области G , остаются меньше некоторой грани M . В самом деле эти интегралы образуют в таком случае последовательность неубывающих и ограниченных сверху чисел, т. е. сходящуюся последовательность.

Тот случай, когда f не принимает в области G положительных значений, тотчас же приводится к предыдущему, если заменим f через $-f$.

Во-вторых. Если функция f принимает в области G и положительные и отрицательные значения, то можно применить предыдущую теорему к абсолютному значению $|f|$. Если интеграл от абсолютного значения функции сходится, то интеграл от самой функции f непременно сходится. Это легче всего доказать с помощью следующего приема. Полагаем

$$f = f_1 - f_2,$$

где $f_1 = f$, если $f \geq 0$ и $f_1 = 0$, если $f < 0$, а $f_2 = -f$, если $f \leq 0$ и $f_2 = 0$, если $f > 0$; функции f_1 и f_2 нигде не имеют отрицательных значений, непрерывны там, где непрерывна функция f и нигде не превышают абсолютного значения самой функции. Если следовательно интеграл от $|f|$ для монотонной последовательности частичных областей G_v остается ограниченным, то тем более это справедливо для интегралов от f_1 и от f_2 , поэтому интегралы от f_1 и от f_2 сходятся, а вместе с тем сходится и интеграл от разности $f = f_1 - f_2$.

§ 6. Применения к геометрии.

1. Вычисление объемов. Исходным пунктом нашего определения интеграла служило понятие объема. Поэтому непосредственно ясно, каким образом можно применить интегралы, взятые по области, для вычисления объемов.

Чтобы вычислить например объем эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

мы пишем уравнение в виде:

$$z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Объем половины эллипсоида, находящейся над плоскостью x, y , выразится тогда двойным интегралом, взятым по области круга $x^2 + y^2 \leq a^2$:

$$\frac{V}{2} = \frac{b}{a} \iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

Преобразуя к полярным координатам, получаем:

$$\frac{b}{a} \iint \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \, d\varphi,$$

или, разлагая на два простых интеграла, имеем:

$$\frac{V}{2} = \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr,$$

откуда получается искомое значение

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Чтобы вычислить объем эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

мы делаем замену переменных

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = abr$$

и получаем для половины объема выражение:

$$\frac{V}{2} = c \iint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = abc \iint_{G^*} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi;$$

при этом область G^* есть прямоугольник

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

поэтому

$$\frac{V}{2} = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{2\pi}{3} abc,$$

или

$$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Наконец вычислим еще объем пирамиды, ограниченной плоскостями координат и плоскостью $ax + by + cz - 1 = 0$, где a , b и c будем считать положительными числами. Мы получим для объема следующее выражение:

$$V = \frac{1}{c} \iint_G (1 - ax - by) dx dy,$$

причем областью интегрирования служит треугольник

$$0 \leq x \leq \frac{1}{a}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{b} (1 - ax)$$

в плоскости x, y . Следовательно имеем:

$$V = \frac{1}{c} \int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b}(1-ax)} (1-ax-by) dy;$$

интегрирование по y дает:

$$(1-ax)y - \frac{b}{2}y^2 \Big|_0^{\frac{1}{b}(1-ax)} = \frac{(1-ax)^2}{2b},$$

а интегрируя еще раз и пользуясь подстановкой $1-ax=t$, получим:

$$V = \frac{1}{2bc} \int_0^{\frac{1}{a}} (1-ax)^2 dx = -\frac{1}{6abc} (1-ax)^3 \Big|_0^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{6abc}.$$

Мы могли бы конечно тот же результат получить из теоремы элементарной геометрии: объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Для того чтобы получить объем более сложного тела, можно разбить это тело на отдельные части, объемы которых выражаются с помощью интегралов, взятых по области. Однако мы найдем (преимущественно в следующей главе) выражения для объема, ограниченного замкнутой поверхностью, в которых такое разбиение не применяется.

2. Общие замечания относительно вычисления объемов. Тела вращения. Объем в полярных координатах. Подобно тому, как площадь плоской области G можно выразить с помощью интеграла

$$\iint_G dg = \iint_G dx dy,$$

мы можем таким же образом выразить объем трехмерной области G с помощью интеграла, взятого по области G :

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

В самом деле, это в точности соответствует нашему определению (см. дополнения) и выражает например тот геометрический факт, что можно получить объем области следующим образом: заполняем пространство равными параллелепипедами, берем объем параллелепипедов, целиком находящихся в области G , и затем неограниченно уменьшаем диаметры параллелепипедов до нуля. Предыдущее общее выражение для объема трехмерной области дает возможность найти различные формулы для вычисления объемов. Для этого достаточно только ввести в указанный интеграл вместо x, y, z другие независимые переменные.

Важнейшие примеры представляют полярные координаты и цилиндрические координаты, определение которых сейчас будет дано. Вычислим например объем тела вращения, которое получается при вращении кривой $x = \varphi(z)$ вокруг оси z . При этом мы предполагаем, что вращающаяся кривая не пересекает оси z и что тело вращения сверху и снизу ограничено плоскостями $z = \text{const}$. Это тело определяется следовательно неравенствами вида:

$$a \leq z \leq b$$

и

$$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varphi(z).$$

Объем его выражается предыдущим интегралом. Вводим теперь вместо x, y, z цилиндрические координаты $z, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \vartheta = \arccos \frac{x}{\rho} = \arcsin \frac{y}{\rho}$, тогда мы для объема тотчас же получаем выражение:

$$V = \iiint_G dx dy dz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varphi(z)} \rho d\rho,$$

из которого после выполнения простых интегрирований находим:

$$V = \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 dz.$$

К этому выражению можно притти и непосредственным наглядным путем. В самом деле разобьем тело вращения плоскостями, перпендикулярными оси z , на узкие пластинки $z_v \leq z \leq z_{v+1}$ и назовем через m_v наименьшее, а через M_v — наибольшее из расстояний $\varphi(z)$ точек поверхности от оси вращения в этих пластинках, тогда объем пластинки заключается между объемами двух цилиндров, высота которых $\Delta z = z_{v+1} - z_v$, а радиусы соответственно равны m_v и M_v . Следовательно:

$$\sum \pi m_v^2 \Delta z \leq V \leq \sum \pi M_v^2 \Delta z.$$

Отсюда, согласно определению обыкновенного интеграла, следует, что

$$V = \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 dz.$$

Если область G содержит в себе полюс O системы координат r, ϑ, φ и если поверхность, ограничивающая нашу область, выражается в полярных координатах уравнением:

$$r = f(\vartheta, \varphi),$$

где функция f однозначна, то часто удобно для вычисления объема ввести

вместо x, y, z эти полярные координаты. Подставляя в формулу преобразования найденное на стр. 206 значение функционального определителя

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta,$$

мы непосредственно получаем для нашего объема выражение:

$$V = \iiint_{G^*} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{f(\vartheta, \varphi)} r^2 dr;$$

произведя сперва интегрирование по r при постоянных значениях ϑ и φ , получаем:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [f(\vartheta, \varphi)]^3 \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

В частности для шара, где $f(\vartheta, \varphi) = R$ имеет постоянное значение, непосредственно получаем:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3. Площади кривых поверхностей. Подобно тому, как мы выразили длину дуги кривой с помощью обыкновенного интеграла, мы теперь попытаемся найти выражение для площади кривой поверхности с помощью интеграла, взятого по области. Длину дуги мы рассматривали как предел периметра вписанной ломаной линии, при неограниченном уменьшении всех ее сторон. Такому измерению длины дуги вполне соответствовал бы следующий подход к измерению площади: впишем в поверхность плоский многогранник, грани которого представляют треугольники, и найдем сумму площадей этих треугольников. Представим себе далее, что грани вписанного многогранника неограниченно уменьшаются, притом так, что длина наибольшей из сторон треугольников стремится к нулю, и ищем предел суммы площадей треугольников. Этот предел и следовало бы рассматривать как площадь кривой поверхности. Оказывается однако, что такое определение площади было бы лишено точного смысла, так как, вообще говоря, указанный процесс не дает определенного предела. Причина этого заключается в следующем. Ломаная, вписанная в дугу кривой, обладает тем свойством, что направления отдельных сторон сколь угодно мало отличаются от соответствующего направления кривой, если только стороны ломаной достаточно малы, это свойство вытекает из теоремы о среднем значении в дифференциальном исчислении. Но для поверхности дело обстоит по-иному. Грани вписанного в кривую поверхность многогранника могут иметь сколь угодно крутой наклон по отношению к касательным плоскостям к поверхности в соседних точках даже в том случае, если длины сторон треугольников сколь угодно малы. Поэтому площадь поверхности такого многогранника ни в коем случае нельзя будет рассматривать как приближенное значение площади кривой поверхности. В дополнениях к этой главе мы подробно рассмотрим пример, иллюстрирующий эти обстоятельства.

При определении длины кривой мы можем положить в основу вместо вписанной ломаной линии описанную, т. е. такую ломаную, все стороны которой касаются кривой. Это определение длины дуги как предела периметра такой ломаной линии можно легко перенести на случай площади кривой поверхности. Это перенесение еще удобнее сделать, если принять во внимание следующее замечание. Можно получить длину дуги кривой $y=f(x)$, имеющей непрерывную производную $f'(x)$, между точками, абсциссы которых a и b , если разделить интервал от a до b точками деления x_0, x_1, \dots, x_n на n равных или неравных частей, взять в y -ом частичном интервале произвольную точку ξ_v , провести в соответствующей точке кривой касательную и рассмотреть длину l_v того отрезка касательной, который лежит внутри полосы $x_{v-1} \leq x \leq x_v$. Тогда сумма $\sum_{v=1}^n l_v$ стремится к длине дуги, т. е. к интегралу

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

когда n неограниченно возрастает, и при этом длина наибольшего из частичных интервалов стремится к нулю. Это утверждение следует из того, что

$$l_v = \sqrt{1 + [f'(\xi_v)]^2} (x_{v+1} - x_v).$$

Теперь мы можем аналогичным образом определить площадь кривой поверхности. Рассмотрим сперва кусок поверхности, лежащий над замкнутой областью G плоскости x, y , который задается функцией $z=f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные. Мы делим область G на n частичных областей G_1, G_2, \dots, G_n , площади которых соответственно равны $\Delta G_1, \dots, \Delta G_n$, и выбираем в каждой из этих частичных областей соответственно точки $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$. В точке поверхности с координатами

$$\xi_v, \eta_v \text{ и } \zeta_v = f(\xi_v, \eta_v)$$

строим касательную плоскость и берем ту часть этой плоскости, которая лежит над областью G_v . Если обозначим через α_v угол, который эта касательная плоскость

$$z - \zeta_v = f_x(\xi_v, \eta_v)(x - \xi_v) + f_y(\xi_v, \eta_v)(y - \eta_v)$$

образует с плоскостью x, y , а через ΔF_v — площадь рассматриваемого куска касательной плоскости, то будем иметь:

$$\Delta G_v = \Delta F_v \cos \alpha_v,$$

так как область G представляет проекцию площадки F_v на плоскость x, y . С другой стороны, имеет место равенство (гл. III, § 2, п° 3):

$$\cos \alpha_v = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_v, \eta_v) + f_y^2(\xi_v, \eta_v)}},$$

и следовательно:

$$\Delta F_v = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_v, \eta_v) + f_y^2(\xi_v, \eta_v)} \cdot \Delta G_v.$$

Образуя теперь сумму всех таких площадей

$$\sum_{v=1}^n \Delta F_v$$

и неограниченно увеличивая число n так, чтобы диаметр, а вместе с тем и площадь наибольшей частичной области, стремились к нулю, получим в пределе, на основании нашего определения интеграла, значение

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dg.$$

Это значение, которое не зависит от способа разбиения нашей области G , мы примем за определение площади данного куска кривой поверхности. Наше определение согласуется в случае плоской площадки с определением, раньше установленным. В самом деле, например при $z = f(x, y) = 0$, имеем:

$$S = \iint_G dg.$$

Часто выражение

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dg = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

называют элементом поверхности $z = f(x, y)$. Тогда интеграл, выражающий площадь поверхности, символически записывают в виде:

$$\iint_G d\sigma.$$

Если поверхность задана не уравнением $z = f(x, y)$, а уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, то мы приходим к другой форме выражения для площади. Допустим, что на рассматриваемом куске поверхности $\varphi_z \neq 0$, пусть например $\varphi_z > 0$, тогда на основании равенств

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}$$

получаем для площади выражение:

$$\iint_G \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \frac{1}{\varphi_z} dx dy,$$

причем область интегрирования G снова представляет проекцию рассматриваемой части поверхности на плоскость x, y .

Применим нашу формулу к вычислению поверхности шара. Уравнение $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ представляет при положительном знаке полусферу радиуса R . В данном случае:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

следовательно поверхность половины шара выражается интегралом:

$$\frac{S}{2} = R \iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

при этом областью интегрирования G является круг радиуса R в плоскости x, y с центром в начале координат. Вводя полярные координаты и последовательно интегрируя, находим далее:

$$\frac{S}{2} = R \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}};$$

стоящий в правой части обыкновенный интеграл легко вычислить посредством подстановки $R^2 - r^2 = u$. Таким образом имеем:

$$\frac{S}{2} = -2\pi R \sqrt{R^2 - r^2} \Big|_0^R = 2\pi R^2,$$

что совпадает с известным из элементарной геометрии результатом: поверхность шара равна $4\pi R^2$.

При определении площади мы все время выделяли координату z ; мы могли бы с таким же успехом определить площадь в том случае, когда поверхность задана уравнением вида $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$, при помощи интегралов

$$\iint \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dydz \quad \text{или} \quad \iint \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz,$$

если же поверхность задана в неявном виде, можно было бы определить площадь также с помощью интегралов вида:

$$\iint \sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2} \frac{1}{\varphi_y} dz dx$$

или

$$\iint \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \frac{1}{\varphi_x} dy dz.$$

Мы скоро увидим, что все эти выражения дают одно и то же значение для площади.

Если мы при определении площади кривой поверхности хотим освободиться от всяких частных предположений относительно расположения по-

поверхности по отношению к системе координат, мы должны перейти к параметрическому выражению поверхности:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v).$$

Рассматриваемой части поверхности соответствует тогда некоторая область G^* в плоскости u, v . Для того чтобы ввести в предыдущие формулы параметры u и v , рассмотрим сначала кусок поверхности, относительно которого мы будем предполагать, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = D$$

имеет на нем повсюду положительное значение. В таком случае мы на основании главы III, § 3, п^о 4, можем для этого куска поверхности выразить u и v как функции от x и y и получить частные производные:

$$u_x = \frac{\phi_v}{D}, \quad v_x = -\frac{\phi_u}{D},$$

$$u_y = -\frac{\psi_v}{D}, \quad v_y = \frac{\psi_u}{D}.$$

С помощью соотношений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u_x + \frac{\partial z}{\partial v} v_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} u_y + \frac{\partial z}{\partial v} v_y$$

мы получаем:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{D} \sqrt{(\psi_u \phi_v - \phi_u \psi_v)^2 + (\phi_u \chi_v - \chi_u \phi_v)^2 + (\chi_u \psi_v - \psi_u \chi_v)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, вводя u и v в качестве независимых переменных и применяя основные правила преобразования интегралов, взятых по области (§ 4), мы находим для площади выражение:

$$S = \iint_{G^*} \sqrt{(\psi_u \phi_v - \phi_u \psi_v)^2 + (\phi_u \chi_v - \chi_u \phi_v)^2 + (\chi_u \psi_v - \psi_u \chi_v)^2} du dv.$$

В этом выражении ни одна из координат x, y, z не занимает привилегированного положения. Так как к этому выражению площади в параметрической форме мы приходим, исходя из любого другого выражения площади, в котором одна из координат играет особенную роль, то отсюда следует эквивалентность всех этих выражений, и мы получаем, что наше выражение дает площадь рассматриваемой части кривой поверхности, заданной в параметрическом виде, если только предположить, что там нигде не обращаются в нуль одновременно все три функциональных

определителя. Нетрудно проверить вычислением, что это выражение совершенно не зависит от выбора системы координат, как это и должно быть для всякой геометрической величины.

Нашему общему параметрическому выражению для вычисления поверхности мы можем придать другую форму, если применим введенные раньше (стр. 136) коэффициенты квадрата линейного элемента:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

т. е. выражения:

$$E = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2,$$

$$F = \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v,$$

$$G = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2.$$

Путем простого вычисления находим:

$$EG - F^2 = (\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)^2 + (\psi_u \chi_v - \chi_u \psi_v)^2 + (\chi_u \varphi_v - \varphi_u \chi_v)^2.$$

Таким образом мы находим для искомой площади выражение:

$$\iint_{G^*} \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

или для элемента поверхности — выражение:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

В качестве примера рассмотрим снова поверхность шара радиуса R , которую мы теперь представим в параметрической форме:

$$X = R \cos u \sin v,$$

$$Y = R \sin u \sin v,$$

$$Z = R \cos v,$$

причем значения u и v пробегают область $0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$.

Небольшое вычисление приводит снова к выражению:

$$R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v \, dv = 4\pi R^2.$$

Мы можем далее применить наш результат в частности к поверхности вращения, получающейся от вращения кривой $z = \varphi(x)$ вокруг оси z . Примем за параметры поверхности полярные координаты u и v в плоскости x, y , тогда:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varphi(u),$$

следовательно:

$$E = 1 + [\varphi'(u)]^2, \quad F = 0, \quad G = u^2,$$

и мы получаем для искомой поверхности выражение:

$$\int_0^{2\pi} dv \int_{u_0}^{u_1} u \sqrt{1 + [\varphi'(u)]^2} du = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + [\varphi'(u)]^2} u du.$$

Вводя вместо u в качестве параметра длину дуги s меридианной кривой $z = \varphi(u)$, получаем для искомой поверхности вращения, заключающейся между двумя параллельными кругами, выражение вида:

$$2\pi \int_{s_0}^{s_1} u ds.$$

§ 7. Применения к физике.

Мы уже видели в § 2, п^о7, каким образом понятие массы связано с понятием об интеграле, взятом по области. Теперь мы распространим некоторые другие понятия из области механики, которые мы рассматривали в первом томе (гл. V, § 2, п^о5), на случай нескольких независимых переменных.

1. Статический момент и центр тяжести. Статическим моментом материальной точки массы m относительно плоскости x, y мы называем произведение mz из массы ее m на координату z . Соответственно статическим моментом относительно плоскости y, z является mx , а относительно плоскости z, x — произведение my . Статические моменты нескольких материальных точек складываются, т. е. под статическим моментом системы материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n и координатами $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ мы разумеем выражения

$$T_x = \sum_{v=1}^n m_v x_v, \text{ или } T_y = \sum_{v=1}^n m_v y_v, \text{ или } T_z = \sum_{v=1}^n m_v z_v.$$

Если речь идет не о конечном числе материальных точек, а о массе плотности $\mu = \mu(x, y, z)$, непрерывно распределенной в области трех измерений или на поверхности или на кривой, то мы определяем статический момент такого непрерывного распределения масс с помощью предельного перехода совершенно таким же образом, как мы это делали в первом томе (гл. V, § 2), и приходим таким путем к выражению статических моментов с помощью интегралов. Например трехмерную область G мы представляем себе разложенной сперва на n частичных областей, массу каждой из этих областей мы представляем себе сосредоточенной в произвольной точке соответствующей области и для этой системы, состоящей из n материальных точек, находим статический момент. Легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$, если только при этом наибольший диаметр частичных областей стремится к нулю, получаются в пределе величины:

$$T_x = \iiint_G \mu x dx dy dz, T_y = \iiint_G \mu y dx dy dz, T_z = \iiint_G \mu z dx dy dz,$$

которые мы будем называть статическими моментами массы, распределенной в пространственной области.

Совершенно аналогичным образом мы определим статические моменты массы, распределенной по поверхности F , выраженной уравнениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \phi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

с поверхностной плотностью $\mu(u, v)$, при помощи интегралов:

$$T_x = \iint_F \mu x \, d\sigma = \iint_G \mu x \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

$$T_y = \iint_F \mu y \, d\sigma = \iint_G \mu y \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

$$T_z = \iint_F \mu z \, d\sigma = \iint_G \mu z \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Наконец статические моменты массы, распределенной по пространственной кривой $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, с линейной плотностью $\mu(s)$, определяются выражениями:

$$T_x = \int_{s_0}^{s_1} \mu x \, ds, \quad T_y = \int_{s_0}^{s_1} \mu y \, ds, \quad T_z = \int_{s_0}^{s_1} \mu z \, ds,$$

при этом s означает длину дуги.

Центром тяжести массы M , распределенной по области G , называют точку, имеющую координаты:

$$\xi = \frac{T_x}{M}, \quad \eta = \frac{T_y}{M}, \quad \zeta = \frac{T_z}{M}.$$

Следовательно для массы, распределенной в трехмерной области, координаты центра тяжести даются выражениями:

$$\xi = \frac{1}{M} \iiint_G x \mu \, dx \, dy \, dz \text{ и т. д.,}$$

где

$$M = \iiint_G \mu \, dx \, dy \, dz.$$

В качестве примера рассмотрим сперва однородный полушар H :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0;$$

плотность примем равной единице.

Первые два статических момента

$$T_x = \iiint_H x \, dx \, dy \, dz.$$

$$T_y = \iiint_H y \, dx \, dy \, dz$$

равны нулю, потому что интегрирование по x в первом случае и по y во втором случае дает значение нуль. Для вычисления третьего момента

$$T_z = \iiint_H z \, dx \, dy \, dz$$

вводим с помощью уравнений

$$z = z, \quad x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

цилиндрические координаты z , r и ϑ и находим:

$$\begin{aligned} T_z &= \int_0^1 z \, dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r \, dr \int_0^{2\pi} d\vartheta = \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1-z^2}{2} z \, dz = \pi \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Так как масса полушара равна $\frac{2\pi}{3}$, то центр тяжести имеет координаты:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=\frac{3}{8}.$$

Далее определим центр тяжести поверхности полушара радиуса 1, принимая, что масса распределена на поверхности равномерно, и плотность ее равна единице. Мы в § 6, п° 3, вычислили элемент поверхности при параметрическом представлении:

$$x = \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v,$$

и нашли, что

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin v.$$

Мы получаем в таком случае выражения трех статических моментов:

$$\begin{aligned} T_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \, dv \int_0^{2\pi} \cos u \, du = 0, \\ T_y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \, dv \int_0^{2\pi} \sin u \, du = 0, \\ T_z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos v \, dv \int_0^{2\pi} du = 2\pi \frac{\sin^2 v}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

Так как масса очевидно равна 2π , то центр тяжести имеет координаты

$$x=0, y=0, z=\frac{1}{2}.$$

2. Момент инерции. Понятие момента инерции, введенное в главе V, § 2, п^о 7 первого тома, также легко обобщить на случай большого числа измерений. Моментом инерции материальной точки относительно оси x называется произведение ее массы на

$$\rho^2 = y^2 + z^2,$$

т. е. на квадрат расстояния точки от оси x . Соответственно этому под моментом относительно оси x непрерывно распределенной в области G массы плотности $\mu(x, y, z)$ разумеют выражение:

$$\iiint_G \mu(y^2 + z^2) dx dy dz,$$

и аналогичные выражения представляют моменты инерции относительно других осей. Иногда вводят также определение момента инерции относительно точки, например относительно начала координат, с помощью выражения:

$$\iiint_G \mu(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

а' относительно плоскости, например относительно плоскости y, z , — с помощью выражения:

$$\iiint_G \mu x^2 dx dy dz.$$

Аналогично определяется момент инерции массы, распределенной по поверхности F , относительно оси x при помощи выражения:

$$\iint_F \mu(y^2 + z^2) d\sigma,$$

причем в данном случае $\mu(u, v)$ является непрерывной функцией обоих параметров u и v .

Физическое значение момента инерции в случае области двух и трех измерений такое же, какое было указано ранее в первом томе (гл V, § 2, п^о 7): произведение момента инерции на половину квадрата угловой скорости представляет кинетическую энергию тела, равномерно вращающегося вокруг соответствующей оси.

Для выяснения этих понятий разберем следующие примеры, указывающие, как производится вычисление моментов инерции в простых случаях

Для однородного шара с центром в начале координат и радиусом, равным единице, плотность которого равна единице, на основании симметрии имеем:

$$\begin{aligned} T &= \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz. \end{aligned}$$

Складывая эти три интеграла, получаем:

$$3T = \iiint_V 2(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

вводя полярные координаты, находим:

$$T = \frac{2}{3} \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin v dv \int_0^{2\pi} du = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15}.$$

Для балки, которой ребра a , b , c параллельны соответственно осям x , y , z и центр тяжести которой совпадает с началом координат, момент инерции относительно плоскости x , y равен:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = \frac{abc^3}{12},$$

при этом мы предполагаем, что плотность равна единице.

3. Потенциал притягивающих масс. Мы видели в главе II, § 7, что сила притяжения, с которой неподвижная материальная точка Q с координатами ξ , η , ζ и массой m действует на другую материальную точку P с координатами x , y , z и массой, равной единице, представляется в случае ньютонова закона притяжения выражением:

$$m \cdot \text{grad } \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ означает расстояние между точками P и Q . Сила направлена по прямой, соединяющей обе материальные точки, а величина ее обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если мы рассмотрим теперь силу притяжения, с которой действует на точку P не одна материальная точка, а целый ряд точек Q_1 , Q_2 , Q_3 , ..., Q_n , массы которых соответственно равны m_1 , m_2 , ..., m_n , то мы можем опять представить эту силу как градиент величины

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots + \frac{m_n}{r_n},$$

где r_v означает расстояние точки Q_v от точки P . Если силу можно представить как градиент некоторой скалярной функции, то эту скалярную функцию принято называть потенциалом данной силы. Поэтому мы примем за определение потенциала притяжения системой точек Q_1, Q_2, \dots, Q_n точки P выражение

$$\sum_{v=1}^n \frac{m_v}{V(x - \xi_v)^2 + (y - \eta_v)^2 + (z - \zeta_v)^2}.$$

Если притягивающие массы не сосредоточены в конечном числе отдельных точек, а непрерывно распределены в некоторой области пространства G или на некоторой поверхности F или на линии L , причем плотность μ является непрерывной функцией, то в качестве потенциала данного распределения масс в точке P с координатами x, y, z , лежащей вне притягивающих масс, приходится рассматривать соответственно интеграл

$$\iiint_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

или

$$\iint_F \frac{\mu}{r} d\sigma,$$

или

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\mu}{r} ds.$$

В первом случае интеграл распространяется на трехмерную область G с прямоугольными координатами ξ, η, ζ , во втором случае — на соответствующую часть поверхности F , причем $d\sigma$ есть элемент поверхности, а в третьем случае — на кривую с длиной дуги s . Во всех интегралах r означает расстояние точки P от лежащей в области интегрирования точки Q , а μ — плотность в точке Q .

Так например потенциал однородного шара K радиуса единица с центром в начале координат в точке P с координатами x, y, z выражается, если плотность равна единице, интегралом:

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{d\xi d\eta d\zeta}{V(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} &= \\ &= \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}} d\eta \int_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \frac{1}{r} d\zeta. \end{aligned}$$

Во всех этих выражениях координаты x, y, z точки P являются не переменными интегрирования, а параметрами, и потенциалы являются функциями этих параметров.

Чтобы получить из потенциалов слагающие силы по осям координат, нужно интегралы дифференцировать по этим параметрам. Правила дифференцирования по параметру непосредственно переносятся на крайные интегралы; на основании § 1 можно дифференцировать под знаком интеграла, если только точка P не лежит в области интегрирования, т. е. если мы уверены в том, что ни для одной точки замкнутой области интегрирования расстояние r не обращается в нуль. Например при распределении масс в трехмерной области мы получаем для слагающих силы притяжения следующие выражения:

$$F_1 = \iiint_Q \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad F_2 = \iiint_Q \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$F_3 = \iiint_Q \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta.$$

Наконец заметим, что наши выражения для потенциала и его первых производных сохраняют смысл также в том случае, когда точка P лежит внутри притягивающих масс. Интегралы являются в этом случае несобственными интегралами, и их сходимость устанавливается, как нетрудно показать, с помощью критериев § 5. В качестве примера вычислим потенциал шаровой поверхности F радиуса a , покрытой массой плотности 1, в точке, лежащей вне шара, и в точке, лежащей внутри его. Поместим начало координат в центр шара, а ось x проведем через точку P , лежащую вне или внутри шара; тогда точка P имеет координаты $x, 0, 0$, а потенциал равен:

$$U = \iiint_F \frac{d\sigma}{V(x - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Вводя с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \vartheta, \\ \eta &= a \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \zeta &= a \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

полярные координаты, получаем:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\pi \frac{a^2 \sin \vartheta}{V(x - a \cos \vartheta)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{a^2 \sin \vartheta}{Vx^2 + a^2 - 2ax \cos \vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Полагая

$$x^2 + a^2 - 2ax \cos \vartheta = r^2,$$

откуда

$$ax \sin \vartheta d\vartheta = r dr,$$

имеем (принимая, что $x \neq 0$):

$$U = \frac{2\pi a}{x} \int_{|x-a|}^{|x+a|} \frac{r dr}{r} = \frac{2\pi a}{x} (|x+a| - |x-a|).$$

Следовательно, если $|x| > a$, имеем:

$$U = \frac{4\pi a^2}{|x|},$$

а если $|x| < a$:

$$U = 4\pi a.$$

Таким образом потенциал в точке, лежащей вне шара, такой же, как будто вся масса $4\pi a^2$ была бы сосредоточена в центре: наоборот, для точек, лежащих внутри шара, потенциал есть величина постоянная. На поверхности потенциал остается непрерывным: выражение для U представляет в этом случае несобственный интеграл, значение которого равно $4\pi a$.

Объемный потенциал однородного шара плотности 1 мы можем получить из предыдущего умножением на da и интегрированием по a .

Это дает для точки, лежащей вне шара, значение:

$$\frac{4\pi a^3}{3|x|},$$

т. е. такое значение, как будто вся масса $\frac{4}{3}\pi a^3$ была бы сосредоточена в центре шара.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV.

§ 1. Существование интеграла, взятого по области.

1. О площади двумерных плоских областей и объеме трехмерных областей. Прежде чем перейти к аналитическому доказательству существования интеграла, взятого по области, необходимо предварительно рассмотреть понятие площади (или объема).

Мы видели в первом томе (глава V, стр. 227 и след.), как можно при некоторых общих условиях выразить площадь плоской области с помощью интеграла. Теперь мы, не ссылаясь на это определение и не пользуясь также допущением о существовании площади, которое опирается на нашу геометрическую интуицию, дадим общее определение понятия „площади“ и исследуем, при каких допущениях это понятие имеет смысл.

Мы исходим из прямоугольника, стороны которого параллельны осям x и y , и определяем его площадь как произведение основания на высоту. Если данный прямоугольник разбить прямыми, параллельными его сторонам, на частичные прямоугольники, то на основании нашего определения ясно, что площадь прямоугольника равна сумме площадей частичных прямоугольников.

Площадь области, состоящей из конечного числа прямоугольников, стороны которых параллельны осям, можно теперь определить как сумму площадей этих прямоугольников.

Определенная таким образом площадь не зависит от способа разбиения. В самом деле, если даны два различных разбиения, можно указать третье разбиение, которое будет дальнейшим подразделением каждого из данных; действительно продолжим все прямые, параллельные осям, встречающиеся в том и другом разбиении, через всю область, тогда каждое из разбиений подразделяется на более мелкие прямоугольники. Сумма площадей этих прямоугольников равна, с одной стороны, сумме площадей прямоугольников первого разбиения, с другой стороны, — сумме площадей прямоугольников второго разбиения.

Чтобы определить площадь произвольной ограниченной области B , мы заключаем эту область между двумя областями, составленными из прямоугольников: внутренняя область B_i содержится целиком внутри области B , а внешняя область B_a охватывает область B . С этой целью мы заключаем сначала область B в большой квадрат. Этот квадрат мы разбиваем прямыми, параллельными осям, на малые прямоугольники. Совокупность тех прямоугольников, которые имеют общие точки с областью B , образует область B_a , охватывающую область B ; те из них, которые целиком лежат внутри области B , образуют область B_i , лежащую внутри области B .

Мы должны теперь так определить площадь $J(B)$ области B , чтобы при любом выборе областей B_i и B_a , между которыми заключена область B , имело место соотношение:

$$J(B_i) \leq J(B) \leq J(B_a).$$

Если производить все более и более мелкие разбиения так, чтобы диаметры прямоугольников стремились к нулю, то величины $J(B_i)$ образуют монотонно возрастающую последовательность, а величины $J(B_a)$ — монотонно убывающую последовательность, так как при этом к областям B_i могут только добавляться прямоугольники, а от областей B_a прямоугольники могут только отпадать. Следовательно $J(B_i)$ и $J(B_a)$ стремятся к определенным пределам. Если эти два предела между собой равны, то этот общий предел мы и назовем площадью области B .

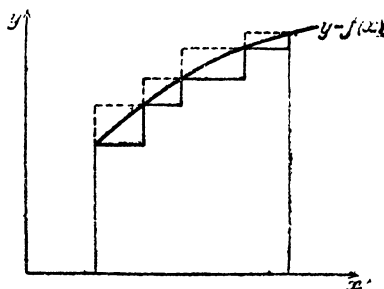
При каких же условиях предел $J(B_i)$ равен пределу $J(B_a)$? Конечно в том случае, когда разность $J(B_a) - J(B_i)$ при неограниченном уменьшении диаметра прямоугольников стремится к нулю. Область $B_a - B_i$ состоит из прямоугольников, имеющих общие точки с границей области B . Если следовательно площадь этой области $B_a - B_i$ стремится к нулю, то это значит, что границу области B можно заключить в область, составленную из прямоугольников, именно область $B_a - B_i$, площадь которой сколь угодно мала. Обратно, если границу области B можно заключить в область S , состоящую из прямоугольников, площадь которой сколь угодно мала, то при достаточно мелком разбиении все прямоугольники из области $B_a - B_i$ окажутся внутри области S , т. е. площадь области $B_a - B_i$ будет меньше площади области S и следовательно стремится к нулю.

Итак получаем следующий результат: предел $J(B_i)$ равен пределу $J(B_a)$ в том и только в том случае, когда границу области B можно заключить в состоящую из прямоугольников

область сколь угодно малой площади. В этом случае наше определение площади имеет смысл¹⁾.

В п°2 мы докажем, что каждую кусочно гладкую кривую, т. е. кривую, состоящую из кусков, в каждом из которых касательная изменяется непрерывно, можно заключить внутри области, состоящей из прямоугольников, площадь которой сколь угодно мала. Следовательно наше условие непременно будет выполнено, если область B состоит из конечного числа частей, ограниченных кусочно гладкими кривыми; такие области (с которыми только и приходится иметь дело на практике) имеют однозначно определенную площадь.

Далее в п°2 будет доказано, что площадь области B , которая разбивается на части с помощью кусочно гладких кривых, равна сумме площадей частных областей. Покажем теперь, что данное определение площади согласуется с прежними определениями площади при помощи интегралов.



Черт. 69.

Рассмотрим сначала область B , ограниченную осью x , прямыми $x=a$, $x=b$ и куском кривой $y=f(x)$. Области B_l и B_a мы можем выбрать указанным на черт. 69 образом (область B_l ограничена сверху сплошной линией, область B_a — пунктиром). Площади B_l и B_a представляют соответ-

ственно нижнюю сумму \underline{F}_n и верхнюю сумму \overline{F}_n интеграла $\int_a^b f(x) dx$, согласно определению, данному в первом томе для обыкновенных интегралов.

К нашей формуле

$$J(B_l) \leq J(B) \leq J(B_a)$$

присоединяется еще на основании определения интеграла соотношение:

$$J(B_l) \leq \int_a^b f(x) dx \leq J(B_a),$$

следовательно

$$J(B) = \int_a^b f(x) dx,$$

т. е. новое определение совпадает с прежним.

¹⁾ С геометрической точки зрения неудовлетворительно то, что мы при определении площади выделяем определенную систему координат. В действительности можно без особых затруднений доказать как для случая двух измерений, так и для общего случая n измерений, что площадь не зависит от выбора системы координат. Мы однако опустили здесь эти рассуждения, во-первых, потому, что они нам для нашей цели, т. е. для доказательства существования интеграла, взятого по области, не нужны, во-вторых, потому, что впоследствии независимость площади от выбора системы координат получится сама собой, коль скоро мы площадь выразим с помощью интеграла, взятого по области, и заметим, что значение такого интеграла, как видно из формул преобразования, не меняется при введении новых прямоугольных координат.

В случае произвольной области B производим разбиение на прямоугольники с помощью прямых, параллельных осям, и убеждаемся, что наше определение площади и выражение площади с помощью интеграла

$$\iint_B dx dy$$

эквивалентны.

Наше определение площади не содержит в себе ничего такого, чего нельзя было бы непосредственно обобщить на случай трехмерного (и даже n -мерного) пространства. Объем параллелепипеда, ребра которого параллельны осям координат, мы определяем как произведение длин трех его ребер, исходящих из одной вершины; объем области, состоящей из конечного числа таких параллелепипедов, определяется как сумма объемов составляющих параллелепипедов; наконец произвольные области мы заключаем между двумя областями, составленными из конечного числа параллелепипедов. Тогда определение объема области B как общего предела объемов внутренних и внешних областей предыдущего типа сохраняет смысл, если только предположить, что граница области B может быть заключена внутри области, состоящей из параллелепипедов, объем которой сколь угодно мал. В §2 будет доказано, что это условие всегда выполняется для областей, ограниченных конечным числом поверхностей, имеющих непрерывно вращающиеся касательные плоскости. Как и раньше, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением областей только такого рода. Под областью мы всегда будем разуметь замкнутую конечную область, ограниченную кусками поверхностей, которые выражаются непрерывно дифференцируемыми функциями.

Объем цилиндра, ось которого имеет направление оси z и основание которого находится в плоскости x, y , равен произведению из площади основания на высоту. Это очевидно справедливо для того случая, когда площадь основания состоит из прямоугольников, параллельных осям. В общем случае цилиндр можно заключить между цилиндрами, основания которых составлены из прямоугольников и объемы которых произвольно мало отличаются между собой, следовательно теорема справедлива и для цилиндров с произвольным основанием. Отсюда следует, что двойной интеграл

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

выражает объем тела, ограниченного плоской областью B , расположенным над ней куском поверхности $z = f(x, y)$ и проектирующей цилиндрической поверхностью. Далее мы видим, что наше определение объема для общей пространственной области G совпадает с интегралом

$$\iiint_G dx dy dz,$$

который образуется с помощью разбиения области на прямоугольные параллелепипеды.

2. Теорема о гладких дугах кривых. При наших рассуждениях относительно площадей мы пользовались теоремой о том, что непрерывная кривая,

которая выражается функцией, имеющей кусочно непрерывную производную, может быть заключена внутри области, составленной из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, площадь которой сколь угодно мала. Достаточно, очевидно, доказать эту теорему для отдельных частей кривой, вдоль которых направление касательной изменяется непрерывно. Такой кусок кривой может быть представлен в параметрической форме, если возьмем например в качестве параметра длину дуги s , в виде:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(s), \\y &= \psi(s), \quad a \leq s \leq b,\end{aligned}$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — непрерывно дифференцируемые функции от длины дуги s . В таком случае имеем:

$$|\varphi'(s)| \leq 1, \quad |\psi'(s)| \leq 1.$$

На основании теоремы о среднем значении в дифференциальном исчислении заключаем, что для всяких двух значений s и s_1 из интервала $a \leq s \leq b$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}|x - x_1| &= |\varphi(s) - \varphi(s_1)| \leq |s - s_1|, \\|y - y_1| &= |\psi(s) - \psi(s_1)| \leq |s - s_1|.\end{aligned}$$

Если мы разделим следовательно дугу кривой на n равных частей длины $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$, то для каждой из частей будут справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}|x - x_v| &\leq \varepsilon, \text{ или } x_v - \varepsilon \leq x \leq x_v + \varepsilon, \\|y - y_v| &\leq \varepsilon, \text{ или } y_v - \varepsilon \leq y \leq y_v + \varepsilon,\end{aligned}$$

где (x_v, y_v) есть начальная точка v -й части, а (x, y) — произвольная точка этой части. Поэтому точки этой части дуги лежат внутри квадрата со стороной 2ε и площадью $4\varepsilon^2$. Вся дуга заключена в n таких квадратов, общая площадь которых, самое большее, равна:

$$4\varepsilon^2 n = 4\varepsilon(b-a).$$

Но последняя величина с неограниченным уменьшением ε неограниченно уменьшается.

Не представляет никакого труда применить только что указанный ход рассуждений к таким кускам поверхностей в пространстве, которые выражаются в параметрической форме при помощи непрерывно дифференцируемых функций

$$\begin{aligned}x &= \varphi(u, v), \\y &= \psi(u, v), \\z &= \chi(u, v).\end{aligned}$$

В связи с этим каждую такую часть поверхности можно заключить внутрь области, объем которой сколь угодно мал, состоящей из прямоугольных параллелепипедов, ребра которых параллельны осям координат.

Следствием только что доказанной теоремы является следующее положение: если разбить плоскую область G на две части G_1 и G_2 , отделенные друг от друга кусочно гладкими дугами кривой, то площадь области G

равна сумме площадей областей G_1 и G_2 . В самом деле, если мы заключим разделяющие линии внутрь области, состоящей из прямоугольников, площадь которой меньше ϵ , и вырежем эту область из области G , то площади G_1 , G_2 и G уменьшаются каждая не больше чем на ϵ . При этом остающиеся в G_1 и G_2 области ограничены кусочно гладкими кривыми и не имеют общих точек друг с другом. Но для областей, которые состоят из частей, не имеющих общих точек, ясно, что площадь равна сумме площадей (это следует из определения площади). Следовательно площадь области G отличается от суммы площадей G_1 и G_2 не больше чем на ϵ . Так как ϵ — произвольно малое число, то наше утверждение доказано. Ясно, что эта теорема о сложении площадей справедлива и при разбиении области G на части G_1, \dots, G_n , число которых больше двух. Распространение этой теоремы на области больше двух измерений не представляет, согласно предыдущему, никаких затруднений.

3. Доказательство существования интеграла по области от непрерывной функции. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна внутри и на границе области G . Мы докажем, что определенные в главе IV, § 2, п^о2, нижние и верхние суммы

$$\sum m_i \Delta G_i, \\ \sum M_i \Delta G_i,$$

стремятся при неограниченном уменьшении диаметров частичных областей G_i к общему пределу, который не зависит от способа разбиения.

Доказательство в существенном такое же, как соответствующее доказательство в дополнениях ко второй главе первого тома, и поэтому мы можем ограничиться здесь кратким его изложением.

Предположим сначала, что разбиение области G произведено при помощи ломаных линий.

Берем максимальный диаметр δ областей G_i настолько малым, чтобы значения функции в двух точках, расстояние между которыми меньше δ , отличались между собой меньше чем на ϵ . Тогда в каждой из этих областей:

$$M_i - m_i < \epsilon,$$

следовательно для разности между верхней и нижней суммами имеет место неравенство:

$$\sum M_i \Delta G_i - \sum m_i \Delta G_i < \epsilon \sum \Delta G_i = \epsilon J(G).$$

Для всякого разбиения, которое получается путем дальнейшего разбиения из данного, нижняя сумма очевидно заключена между верхней и нижней суммой данного разбиения.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что для двух разложений G на частичные области, диаметры которых меньше δ , соответствующие верхние и нижние суммы каждого из разбиений отличаются друг от друга сколько угодно мало, если только взять достаточно малое δ .

Пусть дано еще одно разложение на частичные области G'_i , диаметры которых также меньше δ , тогда и для этого разбиения верхняя и нижняя суммы отличаются между собой меньше чем на $\epsilon J(G)$:

$$\sum M'_i \Delta G'_i - \sum m'_i \Delta G'_i < \epsilon J(G).$$

Эти два разбиения вместе взятые определяют разбиение, являющееся подразделением каждого из них; оно получается, если рассматривать общую часть (если таковая существует) области G_ν и области G'_μ как область $G''_{\nu\mu}$. Нижняя сумма этого третьего разбиения, согласно предыдущему замечанию, не меньше, чем нижние суммы обоих первоначальных разбиений, и отличается от каждой из них меньше чем на $\epsilon J(G)$, следовательно нижние суммы

$$\sum m_\nu \Delta G_\nu \text{ и } \sum m'_\mu \Delta G'_\mu$$

отличаются друг от друга меньше чем на $2\epsilon K(G)$. Если заставим теперь ϵ стремиться к нулю, то на основании критерия сходимости Коши отсюда следует, что существует предел нижних сумм, не зависящий от способа разбиения области. Так как далее верхние суммы сколь угодно мало отличаются, как мы видели, от нижних сумм, то и верхние суммы стремятся к тому же пределу. Тем самым доказано существование интеграла по области

$$\iint_G f(x, y) dg,$$

при условии, что разбиение области G производится с помощью прямых линий.

Последнее условие мы ввели при доказательстве для того, чтобы иметь уверенность, что получающееся разбиение действительно состоит из конечного числа областей $G''_{\nu\mu}$. Если бы например, допуская криволинейные границы частичных областей, кусок границы одного разбиения представлял отрезок прямой $y=0$, а часть границы другого разбиения представляла бы кусок кривой $x^2 \sin \frac{1}{x} = y$, то для результирующего разбиения мы получили

бы вблизи точки $x=0$ бесчисленное множество частичных областей. Теперь однако мы легко можем освободиться от этого ограничительного условия. В самом деле согласно п°2 мы можем всякое криволинейное разбиение заменить таким прямолинейным, чтобы разность площадей, а следовательно и разность соответствующих нижних сумм, была сколь угодно малой. Тем самым случай произвольно ограниченных частичных областей сводится к рассмотренному частному случаю.

Доказательство очевидно не зависит от числа измерений.

Формулированные в главе IV, § 2 (стр. 179, примеч. 1), дополнения к теореме о существовании интеграла, взятого по области, все непосредственно вытекают из рассмотренных там формул для оценки интегралов и не требуют дальнейшего обоснования.

§ 2. Несобственные интегралы как функции параметра.

1. Равномерная сходимость. Интеграл как непрерывная функция параметра. Часто приходится иметь дело с несобственными интегралами, представляющими функции от параметра; так например интеграл от степенной функции

$$\int_0^1 y^x dy$$

при $-1 < x < 0$ представляет несобственный интеграл. Важным примером такого рода является рассмотренный нами в первом томе (глава IV, стр. 217 и 218) при целых значениях x интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy.$$

Рассуждения, которыми мы там пользовались, непосредственно обнаруживают, что интеграл сходится при значениях $x \geq 1$ и представляет таким образом некоторую функцию от x , так называемую Γ -функцию (гамма-функция); при целых положительных значениях x значения этой функции, как мы видели, равны:

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

Но в то время как интегралы при конечном промежутке интегрирования представляют непрерывные функции параметра, если только подынтегральное выражение является непрерывной функцией параметра, в случае несобственного интеграла дело обстоит сложнее. Рассмотрим например интеграл:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y} dy.$$

Смотря по тому, будет ли $x > 0$ или $x < 0$, этот интеграл путем подстановки $xy = z$ переходит в интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \quad \text{или} \quad \int_0^{-\infty} \frac{\sin z}{z} dz = - \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz,$$

как мы видели в первом томе (стр. 367), сходится и имеет, как мы увидим на стр. 245, значение $\frac{\pi}{2}$. Итак, несмотря на то, что функция $\frac{\sin xy}{y}$ (рассматриваемая как функция от x и y) повсюду непрерывна, и интеграл сходится при любом значении x , функция $F(x)$ разрывна, а именно равна $\frac{\pi}{2}$ при положительном значении x , равна $-\frac{\pi}{2}$ при отрицательном значении x и наконец равна нулю при $x = 0$.

Этот факт не представляет ничего удивительного и аналогичен тем фактам, с которыми мы уже встречались при изучении бесконечных рядов (см. т. I, глава VIII, стр. 342), так как вообще процесс интегрирования приходится рассматривать как обобщение суммирования. Подобно тому

как мы на бесконечный ряд непрерывных функций налагали требование равномерной сходимости для того, чтобы сумма этого ряда непременно была непрерывной функцией, так мы теперь и для сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра, должны будем ввести понятие о равномерной сходимости.

Именно, мы скажем, что сходящийся интеграл

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy$$

сходится в интервале $a \leq x \leq \beta$ равномерно (относительно x), если „остаток“ интеграла может быть сделан сколь угодно малым одновременно для всех значений x из рассматриваемого интервала; точнее: если любому, наперед заданному, положительному числу ε можно отнести такое положительное число A , что

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

причем число $A = A(\varepsilon)$ не зависит от x . Часто оказывается полезным следующий критерий: интеграл

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dy$$

сходится равномерно (и абсолютно), если, начиная с некоторого $y = y_0$, имеет место соотношение:

$$|f(x, y)| < \frac{M}{y^a},$$

где M — некоторое положительное постоянное число и $a > 1$.

Действительно в этом случае:

$$\int_A^{\infty} f(x, y) dy < M \int_A^{\infty} \frac{dy}{y^a} = M \frac{1}{(a-1)A^{a-1}},$$

и правая часть может быть сделана сколь угодно малой путем выбора достаточно большого A и не зависит от x . Этот критерий аналогичен соответствующему критерию для рядов (т. I, стр. 340).

Легко видеть, что равномерно сходящийся интеграл от непрерывной функции параметра тоже является непрерывной функцией параметра. В самом деле выберем число A так, чтобы имело место неравенство:

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

для всех значений x из рассматриваемого интервала, тогда мы получаем:

$$\left| F(x+h) - F(x) \right| < \left| \int_0^A \{ f(x+h, y) - f(x, y) \} dy \right| + 2\varepsilon;$$

в силу непрерывности функции $f(x, y)$ мы можем выбрать величину h настолько малой, чтобы интеграл с конечными пределами в правой части был меньше ε тем самым непрерывность нашего интеграла доказана.

Аналогично обстоит дело и в том случае, когда область интегрирования конечна, но подынтегральная функция обращается в некоторой точке в бесконечность. Если функция $f(x, y)$ при $y \rightarrow a$ становится бесконечной, то мы опять скажем, что сходящийся интеграл

$$F(x) = \int_a^b f(x, y) dy$$

сходится равномерно при $\alpha \leq x \leq \beta$, если для любого наперед заданного положительного числа ε можно определить число h так, чтобы

$$\left| \int_a^{a+h} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

причем величина h не зависит от x .

Равномерная сходимость в этом смысле непременно имеет место в том случае, когда в окрестности точки $y=a$ справедливо неравенство:

$$|f(x, y)| < \frac{M}{(y-a)^v},$$

где M — постоянное положительное число, а $v < 1$. Совершенно таким же образом, как и раньше, можно показать, что в случае равномерной сходимости $F(x)$ представляет непрерывную функцию.

Так как несобственные интегралы $F(x)$ при равномерной сходимости в определенном интервале, скажем, в интервале $\alpha \leq x \leq \beta$, непрерывны, то мы имеем право их интегрировать в этом интервале и образовать таким способом соответствующие несобственные двойные интегралы:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_a^b f(x, y) dy;$$

иногда приходится рассматривать вместо конечного интервала $\alpha \leq x \leq \beta$ и бесконечные промежутки интегрирования.

2. Интегрирование и дифференцирование по параметру несобственных интегралов. При интегрировании и дифференцировании несобственных интегралов по параметру не всегда справедлива теорема, что можно произвести эти операции под знаком интеграла, т. е. что можно менять порядок этих операций и первоначального интегрирования (см. пример в п° 3).

Чтобы решить вопрос о возможности изменять порядок интегрирования в несобственных кратных интегралах, часто удобно пользоваться излагаемым ниже критерием или же приходится каждый раз производить особое исследование по образцу следующих далее рассуждений.

Если несобственный интеграл

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy$$

равномерно сходится в интервале $\alpha \leq x \leq \beta$, то справедливо равенство:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx.$$

Для доказательства полагаем:

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^A f(x, y) dy + R_A(x).$$

Тогда $|R_A(x)| < \varepsilon(A)$, где согласно условию $\varepsilon(A)$ есть число, зависящее только от A , но не от x , и стремящееся к нулю при $A \rightarrow \infty$. В силу элементарной теоремы об изменении порядка интегрирования для собственных интегралов имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_0^A f(x, y) dy + \int_{\alpha}^{\beta} R_A(x) dx = \\ &= \int_0^A dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx + \int_{\alpha}^{\beta} R_A(x) dx, \end{aligned}$$

следовательно, на основании теоремы о среднем значении в интегральном исчислении, получаем:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy - \int_0^A dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon(A) |\beta - \alpha|.$$

Если мы начнем неограниченно увеличивать число A , то из этого соотношения непосредственно получится искомая формула.

Совершенно такой же результат получаем, когда имеем дело не с бесконечным промежутком интегрирования, а с подынтегральной функцией, которая имеет разрывы вдоль конечного числа прямых $y = \text{const}$ или же вдоль кривых более общего характера внутри области интегрирования. Соответствующая теорема гласит:

Если функция $f(x, y)$ в интервале $\alpha \leq x \leq \beta$ прерывна только вдоль конечного числа прямых $y = a_1, y = a_2, \dots, y = a_r$ и если сходящийся интеграл

$$\int_a^b f(x, y) dy$$

сходится равномерно относительно x , то этот интеграл представляет в указанном интервале непрерывную функцию от x и

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx,$$

т. е. при этих условиях можно изменить порядок интегрирования.

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему доказательству.

Также легко можно распространить на несобственные интегралы правило дифференцирования по параметру. Имеет место следующая теорема: если непрерывная относительно x функция $f(x, y)$ имеет в интервале $\alpha \leq x \leq \beta$ кусочно непрерывную производную по x и если оба интеграла

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy$$

равномерно сходятся в этом интервале, то имеет место равенство:

$$F'(x) = \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy,$$

т. е. при сделанных предположениях порядок операций интегрирования и дифференцирования по параметру можно изменить.

В самом деле положим

$$G(x) = \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy,$$

тогда по только что доказанной теореме:

$$\int_{\alpha}^{\beta} G(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy = \int_0^{\infty} dy \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x, y) dx.$$

Но внутренний интеграл в правой части равен:

$$\int_a^{\xi} f_x(x, y) dx = f(\xi, y) - f(a, y),$$

следовательно:

$$\int_a^{\xi} G(x) dx = F(\xi) - F(a);$$

дифференцируя последнее соотношение по ξ и заменяя затем ξ через x , получаем:

$$\frac{dF(x)}{dx} = G(x) = \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy,$$

что и требовалось доказать.

Подобным же образом обобщается правило дифференцирования в том случае, когда один из пределов интегрирования зависит от x ; именно, мы можем например писать:

$$\int_{\varphi(x)}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^a f(x, y) dy + \int_a^{\infty} f(x, y) dy,$$

где a — какое угодно постоянное число, лежащее в пределах интегрирования, и можем теперь применить доказанные правила к обоим интегралам, стоящим в правой части.

Наши правила дифференцирования остаются справедливыми и для несобственных интегралов с конечным промежутком интегрирования.

3. Примеры. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{1}{x}.$$

При $x \geq 1$ этот интеграл равномерно сходящийся, так как при положительном значении A :

$$\int_A^{\infty} e^{-xy} dy \leq \int_A^{\infty} e^{-y} dy = e^{-A},$$

и правая часть не зависит от x и может быть сделана сколь угодно малой, если только выбрать A достаточно большим. То же справедливо для интегралов от производных подынтегральной функции по x . Таким образом мы путем последовательного дифференцирования находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y e^{-xy} dy &= \frac{1}{x^2}, \quad \int_0^{\infty} y^2 e^{-xy} dy = \frac{2}{x^3}, \dots, \\ \int_0^{\infty} y^n e^{-xy} dy &= \frac{n!}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

В частности, полагая $x = 1$, получаем формулу:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy = n!,$$

которую мы уже нашли другим путем в первом томе (гл. IV, стр. 217, 218).
Далее рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Опять легко видеть, что при $x \geq a$, где a — любое положительное число, выю няются все условия, достаточные для дифференцирования под знаком инт.грала. Последовательным дифференцированием получаютс формулы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^2} &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{x^5}, \dots, \\ \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^n} &= \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \frac{1}{x^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Наконец, для того чтобы вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy,$$

рассмотрим функцию:

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Этот интеграл равномерно сходится при $x \geq 0$, между тем как интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin y dy$$

равномерно сходится при $x \geq \delta > 0$, где δ — положительное число, которое можно выбрать произвольно малым. Эти два утверждения мы докажем ниже. Таким образом $F(x)$ — непрерывная функция при $x \geq 0$, а при $x \geq \delta$ имеет место соотношение:

$$F'(x) = - \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin y dy.$$

Последний интеграл легко вычислить путем двукратного интегрирования по частям, и мы получаем:

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда интегрированием можно найти значение $F(x)$, а именно:

$$F(x) = \arccot x + C,$$

где C — постоянная. В силу соотношений

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{e^{-xy}}{x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{x},$$

имеющих место при $x \geq \delta$, следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$; так как и $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccot x = 0$, то $C = 0$, и мы получаем:

$$F(x) = \arccot x.$$

Теперь, ввиду непрерывности функции $F(x)$ при $x \geq 0$, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy;$$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} \arccot x = \frac{\pi}{2}$, то окончательно находим:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь приведем еще доказательство того, что интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

при $x \geq 0$ сходится равномерно. В самом деле мы можем написать „остаток“ нашего интеграла в виде:

$$\int_A^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = \int_A^{k\pi} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy + \sum_{v=k}^{\infty} \int_{v\pi}^{(v+1)\pi} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy,$$

где A — произвольное число, $k\pi$ — ближайшее к нему и большее его целое кратное от π . Члены ряда в правой части равенства имеют чередующиеся знаки и монотонно убывают по абсолютной величине, стремясь к нулю, поэтому, на основании критерия Лейбница (т. I, стр. 320), ряд сходится,

и сумма его по абсолютному значению меньше первого члена. Следовательно имеет место неравенство:

$$\left| \int_A^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| < \int_A^{\frac{(k+1)\pi}{x}} e^{-xy} \frac{|\sin y|}{y} dy < \int_A^{\frac{(k+1)\pi}{x}} \frac{1}{A} dy < \frac{2\pi}{A},$$

правая часть которого не зависит от x и может быть сделана сколь угодно малой; таким образом равномерность сходимости доказана.

Наконец равномерность сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin y dy$$

при $x \geq \delta > 0$ непосредственно вытекает из неравенства:

$$\int_A^{\infty} |e^{-xy} \sin y| dy \leq \int_A^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{e^{-Ax}}{x} \leq \frac{e^{-A\delta}}{\delta}.$$

В п° 2 мы установили в случае конечного промежутка интегрирования в одном из интегралов, что достаточным условием для изменения порядка интегрирования является равномерная сходимость интеграла с бесконечными пределами. Что этого условия недостаточно в случае, когда оба интегрирования с вершаются в бесконечных пределах, показывает следующий пример.

Из формулы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

вытекает формула интегрирования:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{1}{1 + x^2};$$

интегрируя еще раз по x , получаем:

$$\int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\arctg x \Big|_1^{\infty} = -\frac{\pi}{4}.$$

Аналогичным путем мы, с другой стороны, получаем:

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right),$$

следовательно

$$\int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом:

$$\int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \neq \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

Итак в указанных в данном примере двойных интегралах изменение порядка интегрирования приводит к неправильным результатам

Изменение порядка интегрирования в несобственных интегралах приводит подчас к интересным преобразованиям. Рассмотрим в качестве примера В-функцию (бета-функция). В-функция определяется интегралом:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Если α и β меньше единицы, то интеграл несобственный, но согласно нашим критериям из § 2 интеграл будет равномерно сходящимся относительно α и β , если ограничить область изменения α и β условиями $\alpha \geq \varepsilon$ и $\beta \geq \eta$, где под ε и η мы подразумеваем произвольные положительные числа; следовательно при всех положительных значениях α и β интеграл представляет непрерывную функцию.

Мы покажем теперь, как можно выразить В-функцию с помощью Г-функции путем преобразований, которые, быть может, на первый взгляд покажутся несколько не бычными. Встречающиеся при этом формальные преобразования, в частности изменение порядка интегрирования, могут быть конечно обоснованы с помощью указанных выше методов, но выполнение этого было бы несколько громоздким, и поэтому мы здесь доказательства приводить не станем. Строгий вывод формулы, которую мы сейчас получим чисто формальным путем, легче дать средствами общей теории функций комплексного переменного.

Прежде всего мы делаем подстановку $t = \frac{x}{u}$, где под u разумеем произвольное положительное число, и получаем:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^u \frac{x^{\alpha-1}}{u^{\alpha-1}} \frac{(u-x)^{\beta-1}}{u^{\beta-1}} \frac{dx}{u},$$

или

$$u^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^u x^{\alpha-1} (u-x)^{\beta-1} dx.$$

Умножая на e^{-u} и интегрируя по u в пределах от 0 до ∞ , получаем, принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} du = \Gamma(\alpha + \beta),$$

соотношение:

$$\Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^u x^{\alpha-1} (u-x)^{\beta-1} dx.$$

При формальном изменении порядка интегрирования мы должны обратить внимание на то, что переменная интегрирования u является также пределом во внутреннем интеграле. Вся область интегрирования в плоскости x, u есть часть плоскости, лежащая внутри острого угла, образованного положительным направлением оси u и прямой $u=x$. Поэтому, изменяя порядок интегрирования, получаем:

$$\int_0^\infty e^{-u} du \int_0^u x^{\alpha-1} (u-x)^{\beta-1} dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} dx \int_x^\infty e^{-u} (u-x)^{\beta-1} du.$$

Во внутренний интеграл, стоящий в правой части, вводим с помощью подстановки $u=x+y$ вместо u новую переменную интегрирования y ; тогда получаем:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{\beta-1} dy = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta).$$

Подставляя найденное значение в уравнение, определяющее $B(\alpha, \beta)$, находим искомое соотношение:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

§ 3. Об определении площади кривой поверхности.

В § 6 главы IV мы дали определение площади поверхности, которое несколько отличается от определения длины дуги, данного в главе IV первого тома: при определении длины дуги мы исходили из вписанных ломаных линий, а при определении площади кривой поверхности мы пользовались не вписанными многогранниками, а касательными плоскостями.

Чтобы обнаружить на примере необходимость такого способа определения, рассмотрим часть цилиндрической поверхности, уравнение которой $x^2 + y^2 = 1$, заключенную между плоскостями $z=0$ и $z=1$. Боковая поверхность этого цилиндра равна 2π . Впишем теперь в эту поверхность многогранник, все грани которого представляют равные между собой треугольники, следующим образом. Делим сперва окружность основания на n равных частей и рассматриваем на поверхности цилиндра m равноотстоящих горизонтальных окружностей, лежащих в плоскостях $z=0, z=h, z=2h, \dots, z=(m-1)h$, причем $h = \frac{1}{m}$. Каждую из этих окружностей мы делим

на n равных частей так, чтобы точки деления каждой следующей окружности находились над серединами интервалов предыдущей окружности. Мы рассмотрим теперь вписанный многогранник, грани которого образованы

хордами наших окружностей и отрезками прямых, соединяющих ближайшие точки деления соседних окружностей. Грани этого многогранника представляют равные между собой равнобедренные треугольники, которые лежат сколь угодно близко к боковой поверхности цилиндра, если только взять достаточно большие значения m и n . Если мы дадим числу n некоторое постоянное значение, то мы можем выбрать число m настолько большое, что каждый из наших треугольников будет сколь угодно мало наклонен к плоскости x, y и следовательно образует угол, сколь угодно близкий к прямому, с поверхностью цилиндра. В таком случае мы не можем ожидать, чтобы сумма площадей треугольников представляла собой приближенное значение для боковой поверхности цилиндра. В самом деле длина основания треугольника равна $2 \sin \frac{\pi}{n}$, а высота по теореме Пифагора равна:

$$\sqrt{\frac{1}{m^2} + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{m^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Так как число треугольников очевидно равно $2mn$, то вся площадь многогранной поверхности выражается следующим образом:

$$F_{n, m} = 2mn \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = 2n \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1 + 4m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Но предел этого выражения зависит от того, каким образом m и n стремятся к бесконечности. Если мы например фиксируем значение n и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$, то выражение наше будет неограниченно возрастать. Если же мы будем неограниченно увеличивать m и n одновременно, считая $m = n$, то предел выражения будет равен 2π . Полагая $m = n^2$,

получим в качестве предела $2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4}}$ и т. д. Впрочем нетрудно видеть из предыдущего выражения $F_{n, m}$ для площади многогранника, что нижняя точка накопления (т. I, стр. 52) числового множества $F_{n, m}$ равна 2π ; это утверждение непосредственно вытекает из того, что $F_{n, m} \geq 2n \sin \frac{\pi}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi$.

В заключение приведем без доказательства следующее интересное предложение, относящееся к определению площади кривой поверхности, предложение, которое мы только что проверили на нашем примере: если мы имеем последовательность многогранников, вписанных в данную часть поверхности и неограниченно к ней приближающихся, то площади многогранников, как было указано, могут и не сходить к площади этой части поверхности. Но предел площадей многогранников, если таковой существует, или каждая из точек накопления этой последовательности площадей больше или по меньшей мере равна площади кривой поверхности. Если каждой последовательности многогранных поверхностей отнести нижнюю точку накопления их площадей, то эти числа образуют определенное числовое множество, связанное с данным куском кривой поверхности, и площадь этого куска поверхности можно определить как нижнюю точку накопления этого множества.

ГЛАВА V.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).

Рассмотренные нами в предыдущей главе интегралы, распространенные на многомерные области, не являются единственно возможным обобщением понятия интеграла на функции от многих переменных. Имеются еще другие обобщения в соответствии с тем геометрическим фактом, что в многомерные области могут быть вложены многообразия меньшего числа измерений; можно поэтому рассматривать интегралы, распространенные на такого рода многообразия. Для двух независимых переменных мы имеем наряду с интегралами, распространенными на двумерные области, еще интегралы, взятые по кривым, т. е. по одномерным многообразиям; для трех независимых переменных можно рассматривать, кроме интегралов, распространенных на трехмерные области, и криволинейные интегралы, также и интегралы, взятые по поверхности (поверхностные интегралы), т. е. интегралы, распространенные на двумерные многообразия, вложенные в трехмерное пространство. Эти понятия: криволинейный интеграл, интеграл, взятый по поверхности, и т. д., непосредственно связанные с практическими приложениями математики, и различные соотношения между этими интегралами будут исследованы нами в настоящей главе.

§ 1. Криволинейные интегралы.

Определение простого интеграла было нами связано с наглядным представлением площади криволинейной трапеции, и естественное обобщение этого понятия на большее число измерений привело нас к интегралам, распространенным на многомерные области. С другой стороны, к понятию однократного интеграла привело нас также и физическое понятие работы. Если мы теперь захотим математически определить работу для произвольного пространственного поля сил, то мы получим криволинейные интегралы в качестве нового обобщения первоначального понятия интеграла для одной независимой переменной.

1. Определение криволинейного интеграла. Обозначения. Основные правила. Мы начинаем с определения криволинейных интегралов для случая трехмерного пространства x, y, z . Пусть в этом пространстве задана кусочно гладкая ¹⁾ кривая C в параметрическом виде с помощью уравнений:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

¹⁾ Кусочно гладкой кривой мы называем, как и раньше, кривую, состоящую из конечного числа дуг, каждая из которых имеет касательную, непрерывно изменяющуюся вдоль всей дуги, включая ее концы.

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ обладают обычными свойствами непрерывности. Рассмотрим, им дугу этой кривой, заключенную между точками P_0 и \bar{P} с координатами x_0, y_0, z_0 и $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и соответствующую значениям параметра t , лежащим в интервале $\alpha \leq t \leq \beta$. Если в какой-нибудь области, содержащей эту дугу кривой, определена непрерывная функция точки $f(x, y, z)$, то вдоль дуги кривой эта функция становится функцией только от параметра t , а именно она равна функции $f[x(t), y(t), z(t)]$. Для того чтобы для этой функции определить криволинейный интеграл вдоль кривой C по аналогии с обыкновенным интегралом, мы делим данную дугу с помощью точек $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ ($P_n = \bar{P}$) на мелкие части и обозначаем разность координат x точек P_i и P_{i+1} через Δx_i . Составим теперь сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] \Delta x_i,$$

обозначая через t_i какое-нибудь значение параметра t , лежащее в интервале изменения параметра, соответствующем дуге, заключенной между точками P_i и P_{i+1} . Если число n точек деления будет неограниченно расти и если при этом наибольшая из длин дуг $P_i P_{i+1}$ будет стремиться к нулю, то естественно ожидать, что наша сумма будет стремиться к некоторому пределу, который мы обозначаем через

$$\int_C f(x, y, z) dx$$

и называем криволинейным интегралом от функции $f(x, y, z)$, взятым вдоль кривой C . То, что этот предел действительно существует и притом не зависит от выбора промежуточных точек, может быть доказано либо непосредственно, так же, как доказывается существование обыкновенного интеграла, либо еще проще путем представления нашей суммы в виде:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(t_i), y(t_i), z(t_i)] \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \Delta t_i,$$

где Δt_i означает приращение, получаемое параметром t при переходе от одной точки деления к следующей. При нашем предельном переходе эта сумма стремится, согласно определению обыкновенного интеграла, к пределу:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{dx}{dt} dt,$$

и мы получаем для нашего криволинейного интеграла следующее выражение:

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \frac{dx}{dt} dt,$$

представляющее криволинейный интеграл с помощью обыкновенного интеграла, взятого по параметру t .

Обыкновенный интеграл представляет собой частный случай криволинейного интеграла, который получается, если взять в качестве пути интегрирования некоторый интервал на оси x .

Таким же образом мы можем определить криволинейные интегралы:

$$\int_C f(x, y, z) dy = \int_a^\beta f(x, y, z) \frac{dy}{dt} dt$$

и

$$\int_C f(x, y, z) dz = \int_a^\beta f(x, y, z) \frac{dz}{dt} dt.$$

Правые части наших формул непосредственно показывают, что криволинейный интеграл зависит исключительно от самой кривой, но не от способа ее изображения, т. е. от выбора параметра t . В самом деле, если мы введем с помощью дифференцируемой функции $\varphi(t)$ новый параметр $\tau = \varphi(t)$ и если в нашем интервале $\frac{d\varphi(t)}{dt} > 0$, то интервал изменения параметра t отображается одно-однозначно на некоторый интервал $\alpha_1 \leq \tau \leq \beta_1$, и

$$\int_a^\beta f(x, y, z) \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x, y, z) \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x, y, z) \frac{dx}{d\tau} d\tau.$$

В приложениях часто встречается следующая комбинация криволинейных интегралов: пусть $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ — три функции, удовлетворяющие тем же требованиям непрерывности, которым мы подчинили функцию $f(x, y, z)$; мы рассматриваем тогда сумму трех криволинейных интегралов:

$$\int_C a(x, y, z) dx + \int_C b(x, y, z) dy + \int_C c(x, y, z) dz,$$

которую можно представить также и в следующем виде:

$$\int_C (a dx + b dy + c dz) = \int_a^\beta (a \dot{x} + b \dot{y} + c \dot{z}) dt$$

(где, как и раньше, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и т. д.). Если функции a, b, c являются компонентами вектора A по осям x, y и z и если мы обозначим через \vec{x} радиус-вектор точки (x, y, z) , то величины $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ являются компонентами

вектора $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, и мы можем подынтегральное выражение записать в виде скалярного произведения $A\dot{x}$.

Мы получаем таким образом следующее выражение для криволинейного интеграла:

$$\int_a^{\beta} A\dot{x} dt = \int_C A dx.$$

Подобно криволинейным интегралам в трехмерном пространстве можно рассматривать также и криволинейные интегралы на плоскости:

$$\int_C f(x, y) dx, \quad \int_C f(x, y) dy, \quad \int_C (a dx + b dy)$$

Далее можно распространить понятие криволинейного интеграла также и на функции от n переменных. В этом общем случае мы проще всего определим криволинейный интеграл

$$\int_C f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i,$$

рассматривая в n -мерном пространстве величины x_1, x_2, \dots, x_n как функции параметра t , изменяющегося в интервале $a \leq t \leq \beta$. Тогда значениям $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ соответствует кривая C , лежащая в n -мерном пространстве

Мы подразумеваем тогда под криволинейным интегралом

$$\int_C f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

простой интеграл

$$\int_a^{\beta} f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \frac{dx_i}{dt} dt.$$

Рассматривая n функций a_1, a_2, \dots, a_n от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , мы можем снова образовать выражение:

$$\int_C (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n),$$

которое можно записать в векторном виде:

$$\int_a^{\beta} A\dot{x} dt = \int_C A dx,$$

где под A мы, как и раньше, понимаем „вектор“ с компонентами a_1, a_2, \dots, a_n , а под x — радиус-вектор точки (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Из представления криволинейных интегралов с помощью обыкновенных интегралов мы делаем следующие непосредственные заключения:

Значение криволинейного интеграла зависит от направления, в котором описывается кривая C , и если эту же кривую C мы будем описывать в обратном направлении, т. е. от точки \bar{P} до точки P_0 , то значение интеграла умножается на -1 . Доказательство очевидно само собой. Вследствие этого свойства мы будем всегда, задавая кривую C , предполагать заданным также и направление, в котором эта кривая описывается, т. е. мы будем считать кривую C ориентированной кривой (т. I, гл. V, § 2). Замену одной ориентировки кривой противоположной мы будем обозначать тем, что вместо C будем писать $-C$. Если кривая C получается путем соединения двух последовательно описываемых кривых C_1 и C_2 , то мы пишем символически:

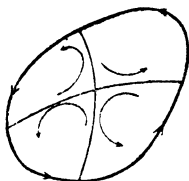
$$C = C_1 + C_2;$$

тогда для соответствующих криволинейных интегралов также имеет место соотношение:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2},$$

смысл которого понятен сам собой

Сделаем еще одно полезное для многих целей замечание. Ограничимся случаем двух переменных x и y и рассмотрим криволинейный интеграл



Черт. 70:

$$\int_C (a dx + b dy),$$

взятый вдоль замкнутой кривой C (как на черт. 70), внутри которой поле векторов (a, b) всюду определено и непрерывно.

Тогда всякому разбиению замкнутой области G , ограниченной ориентированной кривой C , на частичные области G_1, G_2, \dots, G_n , ограниченные ориентированными кривыми C_1, C_2, \dots, C_n , соответствует разбиение:

$$\int_C (a dx + b dy) = \int_{C_1} (a dx + b dy) + \int_{C_2} (a dx + b dy) + \dots + \int_{C_n} (a dx + b dy),$$

причем предполагается, что направления обхода всех областей G, G_1, G_2, \dots, G_n одинаковы.

Для доказательства заметим, что при сложении стоящих справа интегралов те части этих интегралов, которые относятся к соответствующим частям границы C , дают в сумме интеграл, взятый вдоль C , тогда как части кривых C_1, C_2, \dots, C_n , лежащие внутри области G , являются общими границами двух соседних частичных областей и описываются поэтому дважды и притом в двух противоположных направлениях, так что относящиеся к этим дугам интегралы взаимно уничтожаются.

В качестве примера криволинейного интеграла приведем формулы выражающие площадь, ограниченную замкнутой кривой C (т. I, гл. V, § 2).

Если на плоскости x, y задана замкнутая кусочно гладкая кривая C с помощью уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то ограниченная ею площадь F имеет величину, равную

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} y \dot{x} dt = - \int_{\alpha}^{\beta} x \dot{y} dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (y \dot{x} - x \dot{y}) dt.$$

Согласно вышеизложенному эти выражения представляют собою не что иное, как криволинейные интегралы

$$F = \int_C y dx = - \int_C x dy = \frac{1}{2} \int_C (y dx - x dy),$$

взятые вдоль кривой C в направлении возрастания значений параметра.

2. Механическое истолкование криволинейного интеграла. Как уже было упомянуто, криволинейные интегралы непосредственно связаны с физическим понятием работы. Если материальная точка под действием некоторого поля сил, вообще говоря, изменяющегося от точки к точке, движется вдоль нашей кривой C , и если поле сил задано с помощью вектора A с компонентами a, b, c , то наш криволинейный интеграл выражает работу, произведенную при этом движении. В самом деле для случая постоянной силы и прямолинейного движения работа определяется как скалярное произведение вектора силы и „вектора перемещения“. Чтобы обобщить это определение, мы заменим наш путь C прямолинейным многоугольником с вершинами $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = \bar{P}$, а действительно действующую силу — другой, воображаемой, силой, которая вдоль каждой из сторон $P_i P_{i+1}$ постоянна и равняется значению заданной силы в начальной точке P_i .

Работа, произведенная этой воображаемой силой вдоль отрезка $P_i P_{i+1}$, равняется:

$$a(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i + b(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i + c(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i,$$

так как вектор перемещения от P_i к P_{i+1} имеет компоненты $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$. Складывая эти выражения вдоль всего многоугольника, мы получаем сумму, которая при предельном переходе $n \rightarrow \infty$ стремится к нашему криволинейному интегралу, так что этот последний, действительно, дает нам выражение для работы, произведенной данной силой при движении материальной точки вдоль кривой C .

Позже нами будут получены еще другие физические интерпретации криволинейного интеграла.

3. Интегрирование полных дифференциалов. Особенно важное значение имеет тот случай, когда вектор A с компонентами a, b, c является градиен-

том некоторой функции $F(x, y, z)$ или потенциала, т. е. когда $A = \text{grad } F$, или

$$a = F_x, \quad b = F_y, \quad c = F_z.$$

В этом случае криволинейный интеграл принимает вид:

$$\int_C (a dx + b dy + c dz) = \int_a^\beta (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt,$$

и стоящее справа под знаком интеграла выражение равняется просто производной $\frac{dF}{dt}$ функции F по параметру t , так что мы можем это выражение в явном виде проинтегрировать и мы получим справа разность значений F в конечной и начальной точке пути интегрирования. Таким образом мы получаем в этом случае формулу:

$$\int_C (a dx + b dy + c dz) = F[x(\beta), y(\beta), z(\beta)] - F[x(a), y(a), z(a)].$$

Мы видим отсюда, что криволинейный интеграл, взятый в поле градиента, равен разности потенциалов в конечных точках пути интегрирования C и не зависит от самого пути, соединяющего заданные две точки. Это значит, что мы получим одно и то же значение интеграла вдоль всякой кривой, соединяющей обе конечные точки и лежащей внутри той области, в которой определен потенциальная функция F .

Это например имеет место в случае поля силы тяготения, создаваемого одной притягивающей материальной точкой, которое является, как мы уже видели во второй главе, § 7, полем градиента потенциальной функции $\frac{1}{r}$.

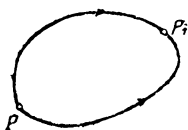
Таким образом работа, производимая силой тяжести при перемещении материальной точки из данного начального положения в данное конечное положение, не зависит от того пути, по которому это перемещение происходит.

Выражение $a dx + b dy + c dz$ представляет собой в данном случае то, что мы раньше называли полным дифференциалом функции $F(x, y, z)$:

$$a dx + b dy + c dz = dF.$$

Мы можем поэтому нашу формулу представить в виде:

$$\int_C dF = F[x(\beta), y(\beta), z(\beta)] - F[x(a), y(a), z(a)],$$



Черт. 71.

и говорим в этом случае об интегрировании полного дифференциала

$$a dx + b dy + c dz.$$

Принципиально важно заметить следующее: утверждение „интеграл не зависит от пути“ эквивалентно утверждению: „интеграл, взятый вдоль замкнутой кривой, равен нулю“. В самом деле, если разбить замкнутую кривую с помощью двух точек P_0 и P_1 (черт. 71.) на две частичные дуги

C и C_1 , то равенство криволинейных интегралов, взятых вдоль C и C_1 от точки P_0 до точки P_1 , равносильно обращению в нуль суммы двух интегралов, из которых один взят вдоль C по направлению от P_0 к P_1 , а другой взят вдоль C_1 по направлению от P_1 к P_0 , а эта сумма и является интегралом, взятым вдоль всей замкнутой кривой.

4. Основная теорема о криволинейных интегралах. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования, или равносильное этому обращение в нуль интеграла, взятого вдоль замкнутого пути, представляет собой особенность, характеризующую специальный класс криволинейных интегралов, если например замкнутая кривая C ограничивает некоторую положительную площадь, то согласно п° 1 криволинейный интеграл $\int_C y dx$ или $\int_C (y dx - x dy)$ отличен от нуля. Основная задача теории криволинейных

интегралов как раз и заключается в том, чтобы получить необходимые и достаточные условия, при которых имеет место этот особенный частный случай.

Мы сначала разберем этот вопрос о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования для случая двух независимых переменных и тут же заметим, что для трех и большего числа независимых переменных получаются совершенно аналогичные результаты.

Мы делаем при этом следующие предположения:

Пусть функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, которые мы снова рассматриваем как компоненты плоского поля векторов A , непрерывны и имеют непрерывные частные производные a_x и b_x в некоторой области B .

Пусть далее G есть некоторая замкнутая область, всецело лежащая внутри этой области B . Тогда, прежде всего, имеет место следующая теорема:

Криволинейный интеграл

$$\int_C (a dx + b dy),$$

взятый вдоль некоторой линии C , лежащей в области G , тогда и только тогда не зависит от специального выбора пути C , если $a dx + b dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т.е. если в G существует такая функция $U(x, y)$, что

$$U_x = a, \quad U_y = b,$$

или

$$A = \text{grad } U.$$

То, что это условие достаточно, т.е. что из этого условия действительно следует независимость интеграла от пути интегрирования, было уже нами доказано в п° 3.

Докажем необходимость этого условия. В самом деле, если интеграл не зависит от пути интегрирования, то, при постоянной начальной точке P_0 кривой C , интеграл является некоторой (однозначной) функцией

$U(\xi, \eta)$ от координат ξ и η конечной точки P . Функция $U(\xi, \eta)$ дифференцируема по ξ и η , и для всякой внутренней точки области G :

$$\begin{aligned} U_{\xi}(\xi, \eta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{U(\xi + h, \eta) - U(\xi, \eta)\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{C+C_h} (a \, dx + b \, dy) - \int_C (a \, dx + b \, dy) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{C_h} (a \, dx + b \, dy), \end{aligned}$$

причем C означает произвольную кусочно гладкую кривую, соединяющую P_0 с P и лежащую в области G , а C_h — кусочно гладкую кривую, соединяющую P с точкой P_1 с координатами $\xi + h$ и η . Так как для достаточно малого h прямолинейный отрезок PP_1 принадлежит G , то можно в качестве пути интегрирования C_h взять этот прямолинейный путь. Но тогда параметрическое изображение линии C_h

$$x = t, \quad y = \eta, \quad \xi \leq t \leq \xi + h,$$

дает:

$$U_{\xi}(\xi, \eta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} a(t, \eta) \, dt = a(\xi, \eta).$$

Совершенно аналогичным образом мы получаем:

$$U_{\eta}(\xi, \eta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\eta}^{\eta+h} b(\xi, t) \, dt = b(\xi, \eta).$$

Таким образом, действительно, $U_x(x, y) = a$, $U_y(x, y) = b$, что и требовалось доказать. Так как все наши функции непрерывны, то полученный нами результат, доказанный вначале только для внутренних точек области G , сохраняет свою справедливость и для точек, лежащих на границе этой области.

Формулированной выше теоремой однако достигнуто пока не много, так как мы еще не имеем общего способа, при помощи которого мы могли бы распознать градиентный характер поля векторов A . Поэтому, вместо градиентного характера векторного поля, мы постараемся найти другое условие, относящееся непосредственно к самим функциям a и b . Это дает нам следующая основная теорема:

Если G есть односвязная область, то необходимыми и достаточным условием независимости интеграла $\int_C (a \, dx + b \, dy)$

от пути C , соединяющего две заданные точки области G , является выполнение так называемого условия интегрируемости:

$$a_y = b_x,$$

для всех точек G . При постоянной начальной точке кривой C интеграл $\int_C (a dx + b dy)$ представляет собой тогда некоторую функцию $U(\xi, \eta)$ координат ξ, η конечной точки этой кривой, и поле векторов A является тогда полем градиента этой функции U , которую поэтому также называют потенциалом поля.

Что это условие необходимо, следует из предыдущей, доказанной нами уже, теоремы. Ибо согласно этой теореме в G существует функция $U(x, y)$, для которой $U_x = a$, $U_y = b$. Так как производные $U_{xy} = a_y$ и $U_{yx} = b_x$ непрерывны, то согласно второй главе (§ 3, п° 3) имеет место равенство $U_{xy} = U_{yx}$, так что $a_y = b_x$, что и требовалось доказать.

Чтобы убедиться в достаточности условия $a_y = b_x$, т. е. в эквивалентности этого условия требованию, чтобы поле A представляло собой поле градиента некоторой функции, мы должны доказать, что при выполнении условия $a_y = b_x$ можно построить в G функцию $U(x, y)$, для которой:

$$U_x = a(x, y) \quad \text{и} \quad U_y = b(x, y).$$

Рассмотрим сначала тот простейший случай, когда G представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, заданный условиями $\alpha \leq x \leq \beta$, $\gamma \leq y \leq \delta$. Постоянную точку P_0 этого прямоугольника с координатами ξ_0, η_0 мы соединяем с точкой P , имеющей координаты ξ, η , посредством двух прямолинейных отрезков $P_0 P'$, $P' P$, параллельных осям координат, где P' есть точка с координатами ξ_0, η . Отрезок $P_0 P'$ изображается в параметрическом виде уравнениями $x = \xi_0$, $y = t$, причем $\eta_0 \leq t \leq \eta$, а отрезок $P' P$ изображается уравнениями $x = t$, $y = \eta$, причем $\xi_0 \leq t \leq \xi$. Поэтому интеграл $\int (a dx + b dy)$, взятый вдоль этой пары отрезков C от точки P_0 до точки P , задается следующим выражением:

$$\int_C (a dx + b dy) = \int_{\eta_0}^{\eta} b(\xi_0, t) dt + \int_{\xi_0}^{\xi} a(t, \eta) dt.$$

Определенная таким путем функция

$$U(\xi, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} b(\xi_0, t) dt + \int_{\xi_0}^{\xi} a(t, \eta) dt$$

является искомой.

В самом деле, дифференцируя, мы непосредственно получаем:

$$U_{\xi}(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)$$

и

$$U_{\eta}(\xi, \eta) = b(\xi_0, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_0}^{\xi} a(t, \eta) dt.$$

Так как частная производная $a_\eta(t, \eta)$ по условию непрерывна, то мы можем в правой части дифференцировать под знаком интеграла, так что

$$U_\eta(\xi, \eta) = b(\xi_0, \eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} a_\eta(t, \eta) dt.$$

В силу равенства $a_\eta(x, y) = b_x(x, y)$ мы получаем, отсюда:

$$U_\eta(\xi, \eta) = b(\xi_0, \eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} b_t(t, \eta) dt = b(\xi_0, \eta) + b(\xi, \eta) - b(\xi_0, \eta) = b(\xi, \eta).$$

Таким образом наше утверждение относительно производных от $U(\xi, \eta)$ доказано, откуда, согласно сделанному нами раньше замечанию, непосредственно следует независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Таким образом:

$$U(\xi, \eta) = \int_C (a dx + b dy),$$

где C есть любая, лежащая в данном прямоугольнике, кусочно гладкая кривая, ведущая от точки P_0 к точке P . Итак наша теорема полностью доказана для случая прямоугольной области R .

Я еще раз подчеркиваю что наш результат правилен и в том случае, когда точка (ξ, η) или целый кусок пути интегрирования принадлежит границе прямоугольника R .

Чтобы обобщить полученный нами результат на произвольные односвязные области G , достаточно распространить наш способ построения функции U на такие области более общего типа. Для этой цели нам нужно предварительно сделать несколько геометрических замечаний. Напомню сначала, что односвязной областью мы называли область, ограниченную одной естественной замкнутой кусочно гладкой кривой¹⁾. Мы увидим позже, что при обобщении нашей основной теоремы условие односвязности области G является существенным.

Хотя мы, вообще говоря, не можем всякую область разбить на конечное число квадратов или прямоугольников, мы можем всегда исчерпать любую область с какой угодно степенью точности с помощью конечного числа прямоугольников.

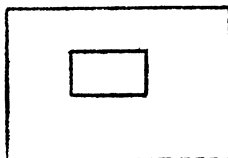
Так например, исходя из разбиения плоскости на квадраты со стороной, равной единице длины, мы берем все квадраты этого разбиения, лежащие в области G ; делим затем все квадраты этого разбиения на конгруэнтные квадраты со стороной, равной $1/2$, и присоединяем те из более мелких квадратов, которые лежат внутри области G , но не содержатся во взятых раньше квадратах со стороной, равной единице. Продолжая этот процесс последовательного присоединения новых квадратов с бесконечно

¹⁾ Укажем еще раз на то, что ограниченные нашими кривыми или поверхностями области всегда содержатся внутри этих кривых или поверхностей, т. е. не простираются в бесконечность, или, как говорят, остаются ограниченными.

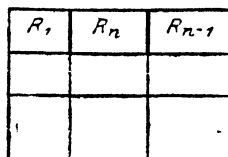
убывающей длиной сторон, мы через конечное число шагов покроем с помощью этих квадратов любую заданную кривую C , всецело содержащуюся внутри области G .

Если G является односвязной областью, то мы можем это построение произвести следующим образом. Мы исходим из какого-нибудь квадрата или прямоугольника R , присоединяем к нему второй, смежный с ним, прямоугольник, имеющий с R общую сторону; к полученной таким путем области мы присоединяем прилегающий к ней третий прямоугольник и т. д.; при каждом таком шаге присоединяемый прямоугольник прилегает

к предыдущей области вдоль одной единственной связной линии, которая впрочем может состоять из нескольких сторон прямоугольника. Если же область G не односвязна, но, скажем, двусвязна, как например область, приведенная на черт. 72а, имеющая вид прямоугольной рамы, то при таком процессе построения может



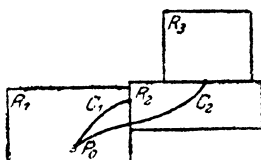
Черт. 72а.



Черт. 72б.

оказаться, что какой-нибудь прямоугольник, например указанный на черт. 72б прямоугольник R_n , граничит с предыдущей областью вдоль двух, не связанных между собой линий.

Распространение нашей основной теоремы на произвольную односвязную область получается, согласно этим предварительным замечаниям, следующим образом: заметим сперва, что мы можем ограничиться односвязными областями G , состоящими из конечного числа прямоугольников $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$; ибо для того, чтобы доказать равенство криволинейных интегралов, взятых вдоль двух линий C и C_1 , лежащих внутри G , нам достаточно продолжить наш процесс построения прямоугольников только до того момента, когда



Черт. 73.

этим прямоугольниками будут покрыты обе данные кривые. Мы берем нашу начальную точку P_0 где-нибудь внутри прямоугольника R_1 и внутри этого прямоугольника определяем так же, как и раньше, функцию $U(x, y)$; затем мы соединяем точку P_0 с помощью какой-нибудь определенной линии C_1 , лежащей в прямоугольнике R_1 , с какой-нибудь точкой P_1 общей границы прямоугольников R_1 и R_2 . В прямоугольнике R_2 мы определяем функцию U как сумму, состоящую, во-первых, из интеграла

$$\int_{C_1} (adx + bdy)$$

и, во-вторых, из интеграла, взятого, как и раньше, вдоль лежащего в R_2 и выходящего из точки P_1 ломаного пути, состоящего из двух отрезков, параллельных осям координат.

В силу своего определения и вследствие уже доказанной независимости от пути интеграла $\int (adx + bdy)$, если путь интегрирования всецело лежит

в прямоугольнике R_1 или R_2 , функция U непрерывна также и вдоль общей границы прямоугольников R_1 и R_2 и удовлетворяет там также уравнениям $U_\xi = a(\xi, \eta)$, $U_\eta = b(\xi, \eta)$. Таким образом градиентный характер вектора с компонентами a и b , а следовательно и наша основная теорема доказаны для области G_2 , состоящей из прямоугольников R_1 и R_2 . Совершенно таким же образом мы можем продолжить определение функции U и на третий прямоугольник R_3 и тем самым доказать основную теорему для области G_3 , получающейся присоединением к G_2 прямоугольника R_3 . Продолжая этот процесс, мы через n шагов определим во всей рассматриваемой части области G функцию U , которая во всей этой частичной области удовлетворяет уравнениям $U_\xi = a(\xi, \eta)$, $U_\eta = b(\xi, \eta)$. Таким образом наша основная теорема доказана и для случая общей области G .

В заключение подчеркнем, что для трех и большего числа измерений имеет место совершенно аналогичная теорема, которая доказывается точно таким же образом. Я ограничусь формулировкой теоремы для случая трех переменных.

Если в односвязной области ¹⁾ G задано непрерывное поле векторов A с компонентами $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ и с непрерывными частными производными $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$, то условия

$$a_y = b_x, \quad b_z = c_y, \quad c_x = a_z,$$

или, в векторной записи, условие

$$\operatorname{rot} A = 0,$$

являются необходимыми и достаточными условиями независимости от пути интегрирования C интеграла

$$\int_C (a \, dx + b \, dy + c \, dz),$$

если только путь C лежит всецело внутри G .

Криволинейный интеграл представляет собой тогда, если считать начальную точку P_0 постоянной, функцию $U(x, y, z)$ от координат конечной точки, причем:

$$\int_{P_1}^P (a \, dx + b \, dy + c \, dz) = U(x, y, z) - U(x_1, y_1, z_1),$$

или в векторной форме:

$$\int_{P_1}^P A \, dx = U(P) - U(P_1),$$

где мы с помощью сокращенной записи $U(P)$, употребительной и в других случаях обозначаем значение функции U в точке P .

¹⁾ Односвязность трехмерной или многомерной области проще всего характеризуется тем свойством, что такая область может быть построена последовательным присоединением прямоугольных областей таким же путем, как и для случая двух измерений.

5. Значение условия односвязности. Во всех предыдущих рассуждениях существенную роль играла односвязность рассматриваемой области. Если бы область не была односвязной, то мы не могли бы быть уверены в том, что функцию U можно всюду сделать однозначным и непрерывным образом. Так например могло бы оказаться, что в процессе последовательного присоединения прямоугольников какой-нибудь прямоугольник R примыкает к предыдущим прямоугольникам вдоль двух, не связанных между собой, частей границы, и при определении функции U в прямоугольнике R мы должны были бы предварительно выбрать ту из этих частей границы R , вдоль которой значения функции U в прямоугольнике R должны непрерывно примыкать к значениям этой функции в уже построенных смежных прямоугольниках. Этим выбором функция была бы в R однозначно определена, но при этом может оказаться, что вдоль другой части границы R значения функции в R не примыкают непрерывным образом к значениям этой функции в смежных прямоугольниках.

Следующий пример показывает, что наша теорема может действительно оказаться несправедливой в случае многосвязной области.

Функции

$$a(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad b(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

определены для всех значений x, y за исключением пары значений $x=0$ и $y=0$. Производные

$$a_y(x, y) = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad b_x(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

также непрерывны всюду, кроме начала координат, и удовлетворяют условию:

$$a_y(x, y) = b_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Если же мы возьмем интеграл

$$\int_C (a dx + b dy)$$

вдоль окружности C с центром в начале координат и с радиусом, равным единице, задавая C уравнениями $x = \cos t$ и $y = \sin t$, то эта окружность не может быть заключена в односвязную область, в которой выполнялись бы все условия теоремы; в качестве области G , содержащей C , и в которой a, b, a_y и b_x непрерывны, мы можем только взять кольцеобразную область, не содержащую начала координат. Мы имеем в этом случае:

$$\int_C (a dx + b dy) = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot -\sin t + \cos t \cdot \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

так что интеграл вдоль замкнутой кривой C отличен от нуля.

§ 2. Связь между криволинейными интегралами и интегралами, распространенными на двумерную область в плоскости (теоремы Гаусса, Стокса и Грина).

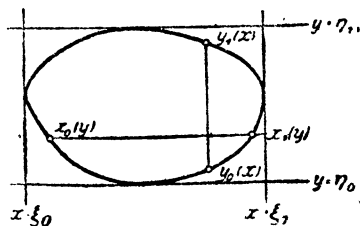
1. Формулировка и доказательство теоремы Гаусса. Так называемая теорема Гаусса дает одно из тех соотношений, связывающих посредством операций дифференцирования криволинейный интеграл с интегралом, распространенным на двумерную область, о которых мы уже говорили во введении к настоящей главе.

Рассмотрим замкнутую область G , ограниченную кусочно гладкими кривыми. Предположим сначала, что граница этой области пересекается прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках, причем мы однако допускаем, что граница может содержать прямолинейные отрезки, параллельные осям. Впоследствии мы заменим это требование более широким. Обозначим границу области G через R и укажем стрелкой направление, в котором описывается R . Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ суть две функции, которые в области G непрерывны и имеют непрерывные производные, то теорема Гаусса выражается следующей формулой:

$$\iint_G [f_x(x, y) + g_y(x, y)] dx dy = \int_R [f(x, y) dy - g(x, y) dx],$$

причем стоящий справа криволинейный интеграл должен быть взят вдоль замкнутой границы R области G в положительном направлении, т. е. эту границу нужно пробегать так, чтобы внутренность области G оставалась слева.

Для доказательства рассмотрим сперва тот частный случай, когда функция $g(x, y)$ всюду в G равна нулю. Так как, согласно нашему предположению, всякая прямая, параллельная оси x , пересекает границу не более чем в двух точках, то мы можем интеграл



Черт. 74.

$$\iint_G f_x(x, y) dx dy$$

представить, согласно результатам предыдущей главы, § 3, в виде двукратного интеграла:

$$\iint_G f_x(x, y) dx dy = \int dy \int f_x(x, y) dx,$$

где y пробегает тот интервал, которому вообще соответствуют какие-нибудь точки в области G , а интеграл $\int f_x(x, y) dx$ берется вдоль отрезка параллели $y = \text{const}$, лежащего внутри G . Обозначим через $x_0(y)$ точку входа в область G прямой, параллельной оси x и отстоящей от нее на расстоянии y , а через $x_1(y)$ — точку выхода этой прямой из области G , и пусть $x_1 \geq x_0$. Тогда:

$$\int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f_x(x, y) dx = f[x_1(y), y] - f[x_0(y), y].$$

Обозначим далее через η_0 и η_1 наименьшее и наибольшее значения y в области G . Тогда мы получаем, интегрируя предыдущее равенство по y от η_0 до η_1 :

$$\iint_G f_x(x, y) dx dy = \int_{\eta_0}^{\eta_1} f[x_1(y), y] dy - \int_{\eta_0}^{\eta_1} f[x_0(y), y] dy$$

Это равенство равносильно для частного случая $g(x, y) = 0$ формулированной выше теореме Гаусса, как это непосредственно вытекает из определения криволинейного интеграла:

$$\int_R f(x, y) dy.$$

Заметим, что наши рассуждения охватывают также и тот случай, когда граница G содержит отрезки, параллельные оси x . Эти отрезки не изменяют значения стоящего справа криволинейного интеграла, так как вдоль каждого такого отрезка $dy = 0$ и соответствующая часть криволинейного интеграла обращается в нуль. Точно такие же рассуждения приводят для случая $f(x, y) = 0$ и при использовании нашего предположения, что всякая прямая, параллельная оси y , пересекает границу области G не более чем в двух точках, к формуле:

$$\iint_G g_y(x, y) dx dy = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \{g[x, y_1(x)] - g[x, y_0(x)]\} dx,$$

или

$$\iint_G g_y(x, y) dx dy = - \int_R g(x, y) dx.$$

Складывая наконец обе наши формулы, мы получаем теорему Гаусса в общем виде:

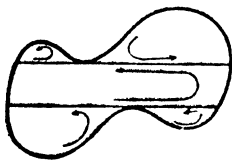
$$\iint_G [f_x(x, y) + g_y(x, y)] dx dy = \int [f(x, y) dy - g(x, y) dx],$$

что и требовалось доказать.

Мы можем теперь распространить нашу формулу на области более общего вида, уже не обладающие тем свойством, что каждая прямая, параллельная осям координат, пересекает их границу не более чем в двух точках. Для этой цели заметим, что путем соединения конечного числа областей, обладающих этим свойством, можно получить области, уже не удовлетворяющие этому требованию. При сложении формул Гаусса, написанных для каждой из этих областей, для которых теорема Гаусса уже доказана, ча-

1) То, что в этой формуле стоит справа знак минус, не должно нас удивить, так как на плоскости ось x и ось y не эквивалентны между собой, ибо ось x переходит в ось y посредством положительного поворота на $\frac{\pi}{2}$, тогда как ось y переходит в ось x посредством отрицательного поворота на $\frac{\pi}{2}$.

сти криволинейных интегралов, относящиеся к внутренним частям пограничных линий этих областей, взаимно уничтожаются, как уже было указано нами ранее (стр. 254), так как каждая такая часть пробегается дважды и притом в двух противоположных направлениях. Поэтому в результате сложения у нас остается формула Гаусса для всей рассматриваемой области. Таким образом формула Гаусса доказана для всех областей G , которые могут быть разбиты на конечное число таких областей, граница каждой из которых пересекается всякой прямой, параллельной осям координат, не более чем в двух точках. Заметим без доказательства, что теорема Гаусса справедлива для всякой области, ограниченной произвольной кусочно гладкой кривой¹⁾. Наконец добавим еще, что условие возможности разбиения



Черт. 75.

области на конечное число частичных областей, ограниченных линиями, пересекаемыми прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках, можно заменить следующим требованием: граница области может быть разложена на конечное число частей, каждая из которых одно-однозначным образом проектируется на обе оси координат; при этом мы однако не исключаем того случая, когда проекция на одну из осей координат состоит только из одной точки, т. е. когда граница содержит отрезки, параллельные осям координат.

В качестве специального применения формулы Гаусса приведем вывод наших прежних формул для площади и области G . Положим $f(x, y) = x$ и $g(x, y) = 0$; мы получаем тогда для площади J формулу:

$$J = \iint_G dx \, dy = \int_R x \, dy.$$

Точно так же при

$$f(x, y) = 0 \text{ и } g(x, y) = y$$

мы получаем:

$$J = - \int_R y \, dx.$$

Обе эти формулы вполне совпадают с нашими прежними результатами (относительно знака см. дальше § 4, ° 1).

2. Векторная формулировка теоремы Гаусса. Теорема Стокса. Наша теорема получает особенно простую формулировку, если воспользоваться обозначениями и понятиями векторного анализа. Для этой цели будем рассматривать обе функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ как компоненты некоторого плоского поля векторов A . Тогда подынтегральная функция двойного интеграла задается формулой:

$$f_x(x, y) + g_y(x, y) = \operatorname{div} A,$$

¹⁾ Для такой области наше условие может и не выполняться, так например часть границы может состоять из кривой $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, которая пересекается осью x в бесконечном числе точек.

т. е. является дивергенцией вектора \mathbf{A} (стр. 84). Чтобы получить векторное выражение также и для криволинейного интеграла, стоящего в правой части формулы Гаусса, введем в качестве параметра длину дуги s границы R , и пусть при этом возрастающим значениям s соответствует положительное направление обхода. Тогда правую часть формулы Гаусса мы можем записать в виде:

$$\int_R [f(x, y) y - g(x, y) x] ds,$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}.$$

Вспомним теперь, что плоский вектор \mathbf{t} с компонентами \dot{x} и \dot{y} по осям x и y имеет длину, равную единице, и направлен по касательной в сторону возрастания длины дуги s , тогда как вектор \mathbf{n} с компонентой $\dot{y}(s)$ по оси x и компонентой $-\dot{x}(s)$ по оси y имеет длину, равную единице, и направлен перпендикулярно к касательной и притом так, что вектор \mathbf{n} расположен относительно вектора \mathbf{t} , как положительная ось x расположена относительно положительной оси y ¹⁾. Если поэтому возрастание длины дуги соответствует положительному направлению обхода, то \mathbf{n} представляет собой единичный вектор, направленный по внешней нормали. Полезно заметить, что компоненты нормального вектора \mathbf{n} могут быть записаны также в форме:

$$\dot{y}(s) = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad -\dot{x}(s) = \frac{\partial y}{\partial n},$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали²⁾; мы можем поэтому записать теорему Гаусса в форме:

$$\iint_G (f_x + g_y) dx dy = \int_R \left(f \frac{\partial x}{\partial n} + g \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds.$$

Таким образом подынтегральная функция в правой части является не чем иным как скалярным произведением $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$, или нормальной компонентой вектора \mathbf{A} . Отсюда получается следующая очень важная форма записи теоремы Гаусса:

$$\iint_G \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy = \int_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_R A_n ds,$$

или словами: интеграл дивергенции поля векторов, распространенный на замкнутую область G , равняется взятому

¹⁾ В этом можно убедиться, опираясь на принцип непрерывности, приведя касательную к нашей кривой к совпадению с осью y ; тогда, если направлению t соответствует возрастающая в положительном направлении y длина дуги s , то $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$, так что нормальный вектор \mathbf{n} должен быть тогда направлен по положительной оси x .

²⁾ Относительно понятия „дифференцирование по некоторому направлению“ см. гл. II, § 4, п° 2.

вдоль границы области G криволинейному интегралу от компоненты поля по внешней нормали. Теореме Гаусса на плоскости мы можем придать еще совершенно другой векторный смысл, заменяя величину $g(x, y)$, величиной $-g(x, y)$. Теорема Гаусса тогда гласит:

$$\iint_G [f_x(x, y) - g_y(x, y)] dx dy = \int_R [g(x, y) \dot{x} + f(x, y) \dot{y}] ds.$$

Рассматривая опять величины $f(x, y)$ и $g(x, y)$ как компоненты поля векторов A , но, считая теперь $f(x, y)$ компонентой по направлению y , а $g(x, y)$ компонентой по направлению x , причем $\dot{x}(s)$ и $\dot{y}(s)$ попрежнему являются компонентами единичного касательного вектора t , мы получаем, что подынтегральная функция в правой части может быть записана в форме $A \cdot t = A$, где $A \cdot t$ означает скалярное произведение векторов A и t , т. е. тангенциальную компоненту вектора A . Для подынтегральной функции левой части мы уже раньше (стр. 84) ввели сокращенное обозначение:

$$\text{rot } A = f_x(x, y) - g_y(x, y)^1),$$

так что мы можем теперь записать теорему Гаусса также и в следующем виде:

$$\iint_G \text{rot } A dx dy = \int_R A_t ds,$$

где положительному направлению касательной соответствует положительное направление обхода.

В словесной формулировке: интеграл ротора плоского поля векторов, распространенный на замкнутую область, равен линейному интегралу тангенциальной компоненты, взятому вдоль границы. Эту формулировку теоремы Гаусса называют также теоремой Стокса на плоскости²⁾.

3. Формулы Грина. Интеграл от функционального определителя. С теоремой Гаусса тесно связаны некоторые другие преобразования интегралов,

¹⁾ Заметим, что для двумерного вектора A выражение $\text{rot } A$ представляет собой не вектор, но только одну единственную (скалярную) функцию, определенную на плоскости x, y .

²⁾ Попутно заметим, что теоремой Гаусса или Стокса можно воспользоваться, чтобы дать другое простое доказательство основной теоремы о криволинейных интегралах, приведенной в § 1, и специально того факта, что условие $f_x = g_y$ является достаточным для независимости интеграла от пути интегрирования. Мы видели, что это последнее условие эквивалентно условию обращения в нуль интеграла, взятого вдоль всякого замкнутого пути. Если такой путь ограничивает область G рассмотренного вида, то теорема Стокса преобразовывает наш криволинейный интеграл

$$\int_R [g(x, y) dx + f(x, y) dy]$$

в интеграл выражения $f_x - g_y$, распространенный по области G , так что, если это выражение обращается в нуль, то и наш криволинейный интеграл, взятый вдоль границы этой области, также должен равняться нулю.

обычно называемые теоремами Грина и имеющие очень много применений в теории дифференциальных уравнений. Чтобы получить эти теоремы, рассмотрим две функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, относительно которых мы предположим, что они имеют в области G непрерывные производные первого и второго порядка. Принимая во внимание равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x) = u_x v_x + uv_{xx} \quad \frac{\partial}{\partial y}(uv_y) = u_y v_y + uv_{yy},$$

мы получаем на основании теоремы Гаусса:

$$\iint_G (u_x v_x + uv_{xx} + u_y v_y + uv_{yy}) dx dy = \int_R (uv_x dy - uv_y dx),$$

или

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = - \iint_G u \Delta v dx dy + \int_R (-uv_y dx + uv_x dy),$$

где для сокращения записи введено встречавшееся уже раньше выражение:

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy}.$$

Эту формулу называют (первой) формулой Грина.

Она доказана при условии непрерывности внутри нашей замкнутой области функций $u_x, v_x, u_y, v_y, v_{xx}, v_{yy}$. Если мы также предположим непрерывность функций u_{xx}, u_{yy} , то, меняя роли функций u и v , мы получаем:

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = - \iint_G v \Delta u dx dy + \int_R (-vu_y dx + vu_x dy).$$

Из этих двух формул мы получаем путем вычитания так называемую вторую формулу Грина:

$$\iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_R [(vu_y - uv_y) dx - (vu_x - uv_x) dy].$$

Фигурирующие в формулах Грина криволинейные интегралы могут быть записаны в несколько иной форме, если принять во внимание, что производная от функции точки $f(x, y)$ по внешней нормали к кривой задается формулой:

$$\frac{\partial}{\partial n} f(x, y) = f_x \dot{y} - f_y \dot{x},$$

если возрастанию длины дуги s соответствует положительное направление обхода. Если мы поэтому условимся понимать под символом $\frac{\partial}{\partial n}$ производную по внешней нормали, то формулы Грина могут быть записаны так:

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = - \iint_G v \Delta u dx dy + \int_R v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

$$\iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_R \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Мы можем впрочем записать первую формулу Грина с помощью векторных обозначений так:

$$\iint_G (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx dy = - \iint_G v \operatorname{div} \text{grad } u dx dy + \int_R v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Слева здесь стоит под знаком интеграла скалярное произведение обоих градиентов $\text{grad } u$ и $\text{grad } v$, а вместо символа Δu стоит равнозначное выражение $\operatorname{div} \text{grad } u$.

Другая очень важная формула преобразования двойных интегралов получается, если мы оба двойных интеграла от

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv_y) \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} (uv_x)$$

преобразуем в криволинейные интегралы и вычтем друг из друга. Мы получаем:

$$\iint_G (u_x v_y - u_y v_x) dx dy = \int_R (uv_x dx + uv_y dy).$$

Эта формула освещает с новой точки зрения сущность функционального определителя. В качестве подынтегральной функции слева стоит функциональный определитель $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$. Предположим, что во всей области G функциональный определитель положителен и что с помощью уравнений $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ область G плоскости x, y отображается на область G^* плоскости u, v , причем (так как $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$) направление обхода сохраняется. Тогда, как мы знаем, площадь области G^* выражается криволинейным интегралом:

$$\int_R u dv = \int_R u (v_x dx + v_y dy),$$

взятым вдоль границы R области G в положительном направлении.

Поэтому и интеграл функционального определителя

$$\iint_G \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

также выражает площадь области G^* , на которую отображается область G , и мы следовательно имеем:

$$\iint_{G^*} du dv = \iint_G \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy.$$

Таким образом мы получили новое доказательство уже выведенной нами в четвертой главе формулы преобразования двойных интегралов для частного случая, когда подынтегральная функция равна единице. Если мы разделим интеграл

$$\iint_G \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

на площадь области G и заставим диаметр области G стремиться к нулю или, другими словами, если мы продифференцируем по области этот интеграл, то мы получим в пределе подынтегральную функцию, т. е. функциональный определитель $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$. Таким образом функциональный определитель равен пределу отношения площади изображения к площади изображаемой области при неограниченном убывании диаметра последней, или, как говорят, коэффициенту искажения в данной точке¹⁾.

§ 3. Наглядная интерпретация и приложения теорем Гаусса и Стокса на плоскости.

1. Интерпретация теоремы Гаусса. Дадим нашим теоремам о двойных интегралах наглядное истолкование с помощью представления стационарного плоского потока в несжимаемой жидкости. Такого рода поток, представляющий собой конечно тол ко идеализацию действительного физического процесса, имеет место, если жидкость, распределенная на плоскости и имеющая поверхностную плотность, равную единице, движется так, что состояние движения, т. е. поле скоростей в каждой точке, не зависит от времени (стационарное движение). Такой поток характеризуется полем вектора скорости v .

Обозначим через v_1 и v_2 компоненты этого вектора скорости. Рассмотрим какую-нибудь дугу C и выберем вдоль этой дуги (совершенно произвольно) положительное направление нормали. Обозначим через n направленный в положительную сторону единичный нормальный вектор этой дуги. Тогда общее количество жидкости, протекающей через дугу C в направлении положительной нормали в течение единицы времени, выражается интегралом:

$$\int_C v \cdot n ds,$$

¹⁾ Так как согласно теореме о среднем значении в интегральном исчислении отношение площадей области и ее изображения равняется среднему значению функционального определителя, то определение двойного интеграла почти непосредственно приводит также и к общей формуле преобразования:

$$\iint_{G^*} f(u, v) du dv = \iint_G f \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy.$$

Предоставляем читателю подробнее провести это рассуждение.

Другое полное доказательство формулы преобразования будет приведено в § 3, п^о 3.

где через s мы обозначаем длину дуги кривой C^1). Если наша кривая замкнута и ограничивает область G и если n означает внешнюю нормаль, то формула Гаусса

$$\oint_R vn \, ds = \iint_G \operatorname{div} v \, dx \, dy$$

утверждает, что общее количество жидкости, вытекшей из области G в единицу времени, равняется интегралу от дивергенции поля скоростей, распространенному на область G .

Эта теорема приводит тотчас же к наглядному истолкованию понятия дивергенции. Стоящий слева линейный интеграл, вообще говоря, не равен нулю. Если он имеет положительное значение, то это значит, что в общей сложности жидкость вытекает из области G ; если же интеграл имеет отрицательное значение, то это значит, что жидкость втекает в G . Поэтому, если состояние жидкости стационарно, т. е. не зависит от времени, то в области G не может произойти ни увеличения, ни уменьшения общего количества материи, а потому в области G должно иметь место либо уничтожение, либо возникновение материи. Говорят, что область содержит в себе стоки или источники; стационарный характер потока проявляется в том, что имеющиеся источники или стоки так регулируют внутри приток или истечение жидкости, что повсюду плотность остается неизменной. Общее количество жидкости, вытекающей из области G , мы называем полной силой источников области G . Эта величина положительна или отрицательна в зависимости от того, преобладают ли в области G источники или стоки. Если разделим общую силу источников области G на ее площадь, то мы получим среднюю силу источников G .

Заставим теперь диаметр области стремиться к нулю, т. е. совершим процесс дифференцирования по области. Мы получим тогда в пределе удельную силу источника или стока в соответствующей точке. Из теоремы Гаусса следует, что дивергенция $\operatorname{div} v$ нашего поля скоростей равняется удельной силе источника или стока рассматриваемого потока. Таким образом теорема Гаусса приводит к наглядному истолкованию понятия дивергенции, введенного нами раньше чисто формально.

Это значение дивергенции можно получить также и путем следующего грубого рассуждения. Разложим данный поток на два потока, текущих параллельно осям координат. Пусть составляющий поток, текущий параллельно оси x , имеет скорость v_1 , а поток, текущий параллельно оси y , — скорость v_2 . Рассмотрим прямоугольник с вершинами: $P_1(\xi, \eta)$, $P_2(\xi + h, \eta)$, $P_3(\xi, \eta + k)$ и $P_4(\xi + h, \eta + k)$, стороны которого параллельны осям координат. Если бы вдоль каждой из сторон P_1P_3 и P_2P_4 скорость v_1 была бы постоянной, а именно равнялась бы вдоль P_1P_3 значению $v_1(\xi, \eta)$, а вдоль P_2P_4 значению $v_1(\xi + h, \eta)$, то общее количество жидкости, выте-

¹⁾ Чтобы убедиться в том, что этот интеграл действительно имеет указанное значение, пре ставим себе, что кривая сначала заменена многоугольником со сторонами $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, и предположим, что вдоль каждой стороны многоугольника вектор скорости постоянен. Совершая затем обычный предельный переход от многоугольника к кривой, мы получим в пределе приведенное интегральное выражение для количества протекающей жидкости.

кающей в единицу времени из прямоугольника по направлению x , равнялось бы разности:

$$kv_1(\xi + h, \eta) - kv_1(\xi, \eta).$$

Разделив на площадь прямоугольника hk , мы получим:

$$\frac{v_1(\xi + h, \eta) - v_1(\xi, \eta)}{h}.$$

Таким же образом и для второго составляющего потока, текущего параллельно оси y , получаем приближенный средний избыток между вытекающей и втекающей жидкостью путем деления полного избытка на площадь прямоугольника. Выражение

$$\frac{v_1(\xi + h, \eta) - v_1(\xi, \eta)}{h} + \frac{v_2(\xi, \eta + k) - v_2(\xi, \eta)}{k}$$

дает следовательно приближенное значение этого среднего избытка для всего потока, а при предельном переходе $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ получается опять приведенное выше выражение дивергенции.

Особенный интерес представляет тот случай, когда поток не имеет источников, т. е. когда при потоке материя нигде не возникает и не уничтожается. Такой поток характеризуется условием:

$$\operatorname{div} v = 0.$$

На основании теоремы Гаусса это условие равносильно условию, чтобы для всякой замкнутой кривой R имело место интегральное соотношение

$$\int_R v_n ds = 0.$$

2. Интерпретация теоремы Стокса. Теорему Стокса мы можем также интерпретировать с помощью представления о плоском потоке в несжимаемой жидкости, скорость которой задается вектором v с компонентами

v_1 и v_2 . Интеграл $\int_R v, ds$, взятый вдоль замкнутой кривой R , мы назовем

циркуляцией жидкости вдоль этой кривой. Эту циркуляцию мы можем, согласно теореме Стокса, представить в форме:

$$\int_R v, ds = \iint_G \operatorname{rot} v dx dy$$

и, как и раньше, это выражение показывает, что ротор вектора v можно рассматривать как удельную циркуляцию или плотность циркуляции в соответствующей точке. Вместо термина „циркуляция“ употребляют также термин „сила вихря“ (вдоль кривой). В этих терминах теорема Стокса формулируется тогда так: сила вихря вдоль замкнутой кривой R равна интегралу от плотности вихря, распространенному на область G , ограниченную кривой R . Особенный интерес представляют здесь снова такие потоки,

при которых циркуляция вдоль всякой замкнутой кривой равна нулю и для которых следовательно, согласно теореме Стокса, плотность вихря также всюду обращается в нуль. Такой поток называется потоком без вихрей и характеризуется уравнением:

$$\operatorname{rot} v = 0.$$

Таким образом стационарный поток, не имеющий ни вихрей, ни источников, должен удовлетворять системе двух уравнений:

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Заметим между прочим, что эти два уравнения представляют особый интерес и играют большую роль и в других областях математики, в первую очередь в теории функций, устанавливая тем самым тесную связь между этими областями математики и теорией потоков в несжимаемой жидкости ¹⁾.

Приведем еще другую интерпретацию теоремы Стокса. Если под v подразумевать уже не поле скоростей, а поле сил, то линейный интеграл

$$\int_R v, ds = \int_R (v_1 dx + v_2 dy),$$

взятый вдоль какой-нибудь замкнутой или незамкнутой линии, выражает работу, производимую полем сил при перемещении точки вдоль кривой R . Если R есть замкнутая кривая, ограничивающая область G , то теорема Стокса говорит, что работа, произведенная при полном обходе области G , равна интегралу от ротора поля сил, распространенному на область G . Для того чтобы работа, производимая при обходе любой замкнутой кривой, всегда равнялась нулю, необходимо, чтобы всюду имело место уравнение:

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0.$$

Обратно, если всюду имеет место это уравнение, то из этого, согласно теореме Стокса, вытекает обращение в нуль интеграла

$$\int_R v, ds = \int_R (v_1 dx + v_2 dy)$$

(стр. 268, примечание 2).

Отсюда следует, в соответствии со сказанным в § 1, что произведенная работа тогда и только тогда не зависит от пути, если во всей области выполняется условие:

$$\operatorname{rot} v = 0.$$

¹⁾ См. например Hurwitz-Courant, Vorlesungen über Funktionentheorie, Берлин 1925, изд. Ю. Шпрингера.

3. Преобразование двойных интегралов. В качестве применения теоремы Гаусса я приведу краткий вывод формулы преобразования двойных интегралов (гл. IV, § 4, а также стр. 271 примечание).

Пусть замкнутая область G плоскости x, y , ограниченная линией R , одно-однозначно отображена на область G^* плоскости u, v с помощью преобразования $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Предположим, что при этом преобразовании сохраняется направление обхода и что обе области удовлетворяют условиям применимости теоремы Гаусса.

Чтобы преобразовать интеграл

$$J = \iint_G f(x, y) dx dy$$

в интеграл, распространенный на область G^* , поступим так: преобразуем сначала J в линейный интеграл, взятый вдоль границы R , и, применяя к этому линейному интегралу формулу замены переменной для простого однократного интеграла, мы преобразуем его в линейный интеграл, взятый вдоль границы R^* области G^* . Преобразовывая затем этот последний линейный интеграл на основании теоремы Гаусса в двойной интеграл, распространенный на область G^* , мы получим искомую формулу преобразования двойных интегралов.

Чтобы провести эту мысль, рассмотрим в качестве вспомогательной функции какую-нибудь функцию $A(x, y)$, получающуюся из $f(x, y)$ неопределенным интегрированием по x , так что

$$A_x = f.$$

Тогда по теореме Гаусса

$$J = \iint_G A_x dx dy = \int_R A dy.$$

Если мы теперь введем в стоящем справа линейном интеграле вместо x и y переменные u и v , т. е. если мы преобразуем границу R области G в границу R^* области G^* с помощью формул $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то мы непосредственно получим:

$$J = \int_{R^*} A(y_u du + y_v dv).$$

Теперь мы применяем к стоящему справа линейному интегралу теорему Гаусса в обратном направлении, т. е. превращаем его обратно в двойной интеграл, распространенный на область G^* . Мы получаем:

$$\int_{R^*} (Ay_u) du + (Ay_v) dv = \iint_{G^*} [(Ay_u)_v - (Ay_v)_u] du dv.$$

Так как

$$(Ay_u)_v = A_v y_u + Ay_{uv}, \quad (Ay_v)_u = A_u y_v + Ay_{uv},$$

причем

$$A_u = A_x x_u + A_y y_u; \quad A_v = A_x x_v + A_y y_v; \quad A_x = f,$$

то мы получаем после небольшого вычисления

$$(A y_v)_u - (A y_u)_v = f \cdot (x_u y_v - x_v y_u);$$

откуда окончательно

$$J = \iint_G f \, dx \, dy = \iint_{G^*} f \cdot (x_u y_v - x_v y_u) \, du \, dv,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Интегралы, распространенные по поверхности.

В теории интегрирования функций от трех переменных мы должны рассмотреть, кроме тройных интегралов, взятых по трехмерной области, и криволинейных интегралов, также интегралы, распространенные по поверхности. Чтобы наглядным образом определить интегралы этого рода, мы предположим некоторые замечания общего характера, которые вместе с тем послужат для большего уточнения наших прежних понятий, главным образом понятий, связанных с интегралами, взятыми по плоской области.

1. Ориентированные области и распространенные по ним двойные интегралы. Я начинаю с обстоятельств, имеющих место для обыкновенного интеграла

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

от функции $f(x)$ одной независимой переменной x . Областью интегрирования является интервал, заключенный между точками $x = a$ и $x = b$. В свое время (т. I, стр. 68) мы непосредственно установили, что

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

Мы можем выразить это свойство простых интегралов следующим образом: рассматриваемому интервалу G приписывается определенное направление или, как говорят, определенная ориентировка. Если изменить эту ориентировку на обратную, т. е. если пробегать этот интервал в обратном направлении, то значение интеграла умножается на -1 . Мы можем это свойство интеграла выразить также равенством:

$$\int_{+G} f(x) \, dx = - \int_{-G} f(x) \, dx,$$

где через $+G$ мы обозначаем нашу область интегрирования, пробегаемую в направлении $a \rightarrow b$, а через $-G$ ту же область, пробегаемую в направлении $b \rightarrow a$.

Для криволинейных интегралов как на плоскости, так и в пространстве мы также убедились в том, что необходимо приписать кривой, вдоль кото-

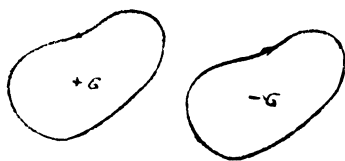
рой производится интегрирование, определенное направление обхода и что при изменении этой ориентировки интеграл умножается на -1 . Если мы

теперь перейдем к интегралам, распространенным на многомерные области, то для полного выяснения природы этих интегралов оказывается целесообразным ввести такого же рода соглашения и дополнить с их помощью наши прежние определения.

Мы приписали в первом томе (стр. 228) площади области G определенный знак, а именно мы считали площадь положительной при обходе границы области в отрицательном направлении и отрицательной при обходе этой границы в положительном направлении. Это принятое нами в свое время соглашение относительно знака площади было само по себе совершенно произвольным. Так как мы нигде дальше не применяли этого соглашения, то мы можем теперь от него освободиться и ввести обратное соглашение, а именно условиться приписывать площади тот же знак, что и направлению обхода ¹⁾. Плоскую область, для которой установлено определенное направление обхода, мы будем называть ориентированной областью: мы стало быть будем ее считать положительно ориентированной при положительном направлении обхода и отрицательно ориентированной в противном случае.

Площадь области G была нами в свое время выражена с помощью двойного интеграла

$$\iint_G dx dy.$$



Черт. 76.

Для того чтобы эта площадь считалась положительной, мы должны при интегрировании приписать ей положительное направление обхода, так что абсолютное значение площади мы можем выразить символически с помощью выражения:

$$\iint_G dx dy = |F| \quad \text{или} \quad \iint_{+G} dx dy = |F|.$$

Если же данная область ориентирована отрицательно, то мы считаем ее площадь также отрицательной, и, обозначая площадь отрицательно ориентированной области символом

$$\iint_G dx dy \quad \text{или} \quad \iint_{-G} dx dy,$$

¹⁾ К нашему прежнему соглашению нас привело желание приписать положительный знак области, лежащей под кривой $y=f(x)$ [при положительной функции $f(x)$], в том случае, когда при обходе области дуга кривой пробегается в направлении возрастающего x . К противоположному соглашению в отношении знака мы придем, если мы уже не будем исходить от дуги кривой, но потребуем, чтобы обход области интегрирования G совершался в соответствии с ее ориентировкой. Так как в дальнейшем первенствующее значение всегда будет иметь прежде всего область интегрирования G , то является целесообразным все соглашения относительно знака связывать с направлением обхода всей области интегрирования G , а не какой-нибудь части ее границы.

мы определяем этот символ, полагая

$$\iint_G dx dy = \iint_{-G} dx dy = -|F|.$$

Соответственно этому площадь в виде криволинейного интеграла выражается формулой:

$$|F| = - \int_R y dx = \int_R x dy^1).$$

Мы будем впрочем всегда понимать под G положительно ориентированную область, если только не будет сделано особой оговорки. В соответствии с этим мы вообще полагаем для всякого двойного интеграла в качестве определения:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{+G} f(x, y) dx dy; \iint_G f(x, y) dx dy = - \iint_{-G} f(x, y) dx dy.$$

Это соглашение в точности соответствует нашему прежнему соглашению, установленному нами для простых и криволинейных интегралов. Не вытекая логически из наших прежних понятий, это соглашение оправдывается только соображениями целесообразности.

Приведем пример, показывающий пользу этого соглашения.

Мы видели, что при одно-однозначном отображении области G плоскости x, y на область G^* плоскости u, v площадь области G выражается в новых координатах интегралом

$$\iint_G dx dy = \iint_{G^*} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

при условии, если функциональный определитель $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ имеет во всех точках области G положительные значения. Как же обстоит дело в том случае, когда функциональный определитель в G повсюду отрицателен? Мы знаем, что при положительном функциональном определителе направление обхода или ориентировка G остается при отображении на G^* без изменения, тогда как при отрицательном функциональном определителе ориентировка G^* противоположна ориентировке G . Поэтому, если рассматривать двойные интегралы

⁴⁾ Полезно уяснить себе на отдельных примерах, что стоящие справа выражения, например

$$- \int_R y dx,$$

всегда положительны; если например область G представляет собой квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, то вдоль вертикальных сторон $dx = 0$; часть этого интеграла, взятая вдоль стороны $y = 0$, также равна нулю, а вдоль четвертой стороны

$$dx < 0, \text{ а } y = 1.$$

независимо от ориентировки области интегрирования, то вышеприведенная формула неверна в случае отрицательного определителя; но если мы будем понимать под G ориентированную (положительно или отрицательно) область, а под G^* ту ориентированную область, на которую отображается G при данном преобразовании, то наша формула остается справедливой и в случае отрицательного определителя, ибо вследствие того, что ориентировка области G^* противоположна в этом случае ориентировке области G , влияние отрицательного знака определителя аннулируется в силу нашего соглашения относительно знака интеграла, распространенного на отрицательно ориентированную область. Точно так же мы можем теперь считать общую формулу преобразования

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

справедливой независимо от того, является ли функциональный определитель $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ в области G всюду положительным или всюду отрицательным ¹⁾, если только мы будем рассматривать входящие в нашу формулу интегралы как интегралы, распространенные на ориентированные области, обозначая при этом через G^* ту ориентированную область, в которую переходит при данном преобразовании ориентированная область G . Таким образом лишь посредством введения ориентировки и соответствующего правила знаков мы достигаем того, что формулы преобразования двойных интегралов оказываются справедливыми во всех случаях без исключения.

Можно освободить геометрическое определение ориентировки области от ссылки на направление обхода границы, определяя ориентировку следующим образом. Возьмем какую-нибудь точку области и отнесем к ней какое-нибудь направление обхода, которое мы можем представить например в виде направления обхода маленькой окружности с центром в данной точке. Мы говорим, что область G ориентирована, если каждой точке этой области приведено в соответствие такое направление обхода и если при непрерывном переходе от одной точки к другой направление обхода, соответствующее первой точке, непрерывно переходит в направление обхода, соответствующее второй.

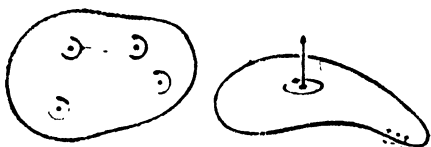
Это замечание мы можем использовать также и для того, чтобы приписать определенную ориентировку всякой двумерной поверхности, расположенной в трехмерном пространстве x, y, z . Мы приписываем сначала некоторое направление обхода какой-нибудь точке, взятой на поверхности, окружая эту точку какой-нибудь замкнутой линией, лежащей на поверхности, и приписывая этой линии определенное направление обхода. Перемещая теперь непрерывно по поверхности эту точку вместе с окружающей ее ориентированной кривой в какое-нибудь другое положение на поверх-

¹⁾ Эта формула однако неверна, если функциональный определитель где-нибудь в области G меняет свой знак; в этом случае может не выполняться условие однозначной обратимости нашего отображения.

ности, мы можем таким путем, вообще говоря, за исключением особого случая, которого мы коснемся ниже, каждой точке поверхности приписать определенное направление обхода; поверхность с установленным на ней таким путем направлением обхода мы называем ориентированной поверхностью.

Смысл такой ориентировки поверхности, расположенной в трехмерном пространстве, можно себе также уяснить следующим образом. Поверхность в пространстве имеет, вообще говоря, две различные стороны, которые мы лучше всего можем отличить, считая одну сторону положительной, а другую — отрицательной. Какая сторона считается положительной и какая — отрицательной, является само по себе безразличным. Так например мы можем считать положительной стороной плоскости x, y сторону, обращенную к положительной оси z .

Мы отмечаем теперь положительную сторону поверхности F , проводя в каждой точке поверхности некоторый направленный в положительную сторону вектор, например нормаль к поверхности, если такая в данной



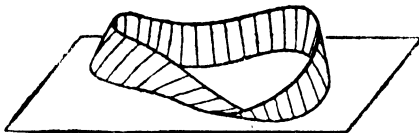
Черт. 77. Ориентировка куска поверхности в пространстве.

точке однозначно определена. Если представить себя стоящим на поверхности так, чтобы голова была обращена в положительную сторону, то мы говорим, что поверхность ориентирована положительно, если ориентировка поверхности и направление нашего тела от ног к голове составляют положительный винт (см. гл. I), т. е., другими словами, если мы можем так непрерывно деформировать поверхность вместе с ее положительным направлением, чтобы поверхность перешла в положительно ориентированную плоскость x, y , а ее положительное направление нормали — в положительную ось z . Противоположную ориентировку на поверхности мы будем считать отрицательной. Мы видим, таким образом, что знак, который мы должны приписать ориентировке поверхности, определяется естественным образом, если мы предварительно припишем определенные знаки сторонам поверхности. Трудности, которые быть может испытывает начинающий при этих рассуждениях, объясняются исключительно тем, что все эти определения не вытекают логически из наших прежних понятий, но представляют собой условные соглашения, польза которых проявится впоследствии в упрощении многих дальнейших рассуждений.

Необходимо отметить, что имеются такие поверхности в пространстве, которым по существу невозможно приписать какую-нибудь определенную ориентировку, так как у таких поверхностей нельзя отличить двух различных сторон. Простейшим примером такой поверхности, которая была открыта Мёбиусом, является так называемый лист Мёбиуса, изображенный на черт. 78. Такую поверхность очень легко самому изготовить из продолговатой полоски бумаги, повернув один из концов этой полоски на 180° по сравнению с его естественным положением и склеив этот вывернутый наизнанку конец с другим концом полоски. Этот лист Мёбиуса обладает тем свойством, что если мы отправимся от какой-нибудь точки поверхности, взятой например на средней линии, и будем

перемещаться по поверхности хотя бы вдоль этой средней линии, то после полного оборота мы вернемся к той же точке, но будем находиться уже на противоположной стороне поверхности.

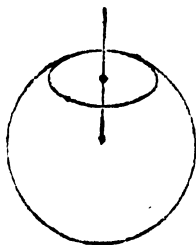
Если при этом перемещении мы будем в то же время непрерывно перемещать некоторую ориентированную кривую, окружающую движущуюся точку, то после полного оборота ориентировка этой кривой перейдет в обратную ориентировку, если не отличать верхней и нижней сторон поверхности ¹⁾. Во всяком случае мы видим, что для таких поверхностей можно с одной стороны поверхности перейти на другую, не переступая через границу поверхности, так что ориентировка такой поверхности в указанном выше смысле является невозможной. В наших последующих рассмотрениях мы будем всегда считать исключенным этот особый случай неориентируемой поверхности.



Черт. 78. Лист Мёбиуса.

Ориентировку поверхности можно также себе наглядно уяснить, изображая поверхность в параметрическом виде с помощью двух параметров u и v . При таком изображении мы получаем на плоскости u, v некоторую область B , которая отображается на данную часть поверхности. Если мы в области B установим какую-нибудь ориентировку, то эта ориентировка переносится при отображении на поверхность F , и этим путем мы эффективно осуществляем ориентировку поверхности F .

Подобно тому как мы можем приписывать определенную ориентировку плоским областям или поверхностям, мы можем и трехмерные области также снабдить определенной ориентировкой. Чтобы к этому притти, полезно ввести следующее соглашение. Рассмотрим трехмерную область G , ограниченную замкнутой поверхностью F . Условимся считать положительной



Черт. 79. Положительно ориентированная шаровая поверхность.

внутреннюю сторону поверхности. Если мы тогда установим на поверхности F такую ориентировку, которая образует с положительной нормалью к поверхности положительный винт, то мы говорим, что трехмерная область G ориентирована положительно; если же мы, наоборот, установим на поверхности такую ориентировку, которая образует с положительной нормалью отрицательный винт, то мы считаем область G ориентированной отрицательно. Так например куб $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ будет положительно ориентирован, если мы ориентируем положительно его основание, лежащее в плоскости x, y .

Точно так же, как и для плоских областей, целесообразно и в пространстве приписывать объему области G положительный или отрицательный знак в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентирована данная область (стр. 277). И так же как и раньше мы условимся, что тройной интеграл, распро-

¹⁾ Т. е. если смотреть с той же стороны поверхности в данной точке.

сторонний на ориентированную область, меняет свой знак при изменении ориентировки области на обратную, т. е.

$$\iiint_{+G} f(x, y, z) dx dy dz = - \iiint_{-G} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Такие же рассуждения, какие мы раньше провели для случая двух измерений, показывают и здесь, что лишь введением такого соглашения мы достигаем того, что формула преобразования

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(x, y, z) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

оказывается справедливой во всех без исключения случаях; в самом деле только при таком соглашении относительно знака интеграла эта формула остается верной и в том случае, когда функциональный определитель $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ всюду отрицателен в области G , ибо аналогично рассуж-

дениям, проведенным в четвертой главе для случая двух измерений, мы можем убедиться, что если при отображении G на G^* функциональный определитель отрицателен, то ориентировка области переходит в обратную.

2. Определение интеграла, распространенного по поверхности в пространстве. После этих подготовительных замечаний мы можем дать общее определение интеграла, распространенного по поверхности. Рассмотрим область пространства x, y, z , в которой определены три непрерывные функции $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ в качестве компонент поля векторов $A = A(x, y, z)$.

Рассмотрим сначала часть поверхности F , однозначно лежащую над замкнутой областью G плоскости x, y и заданную уравнением $z = z(x, y)$. Предположим, что на этой части поверхности задана определенная ориентировка, которая при проектировании на плоскость x, y переносится на проекцию G поверхности F . Обозначим через O единичный нормальный вектор к поверхности F , который притом направлен так, что образует с ориентировкой поверхности положительный винт. Разобьем поверхность F на n частей F_1, F_2, \dots, F_n и обозначим через $\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n$ ¹⁾ площади этих частей. Проектируя эти части на плоскость x, y , мы разобьем область G на частичные области G_i , площади которых мы обозначим через $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$, причем области G_i покрывают всю область G целиком и однократно. Площади ΔF_i мы считаем положительными и должны поэтому приписать площадям ΔG_i положительный или отрицательный знак в зависимости от того, получают ли при проектировании области G_i плоскости x, y положительную или отрицательную ориентировку. Между площадями $\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n$ и площадями $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$ имеют место соотношения вида:

$$\Delta G_i = q_i \Delta F_i,$$

где q_i есть величина, которая при неограниченном убывании диаметра части поверхности F_i имеет своим пределом косинус угла $\gamma(x, y, z)$, образуемого положительной нормалью O с положительной осью z .

¹⁾ См. гл. IV, § 6.

Обозначая через (x_v, y_v, z_v) какую-нибудь точку, лежащую на части поверхности F_v , так что $z_v = z(x_v, y_v)$, мы получим, что сумма

$$\sum_{v=1}^n c(x_v, y_v, z_v) \Delta G_v = \sum_{v=1}^n c(x_v, y_v, z_v) q_v \Delta F_v,$$

при неограниченном убывании наибольшего диаметра частей поверхности F_v , а вместе с тем и областей G_v , стремится к пределу, который мы обозначаем символом:

$$\iint_F c(x, y, z) dx dy \text{ или } \iint_F c(x, y, z) \cos \gamma dF.$$

Мы называем каждое из этих выражений интегралом, распространенным на ориентированную часть поверхности F . То, что этот предел действительно существует, следует из того, что мы можем этот интеграл рассматривать как обыкновенный двойной интеграл, взятый по плоской области G , а именно как интеграл

$$\iint_G c dg = \iint_G c dx dy,$$

где подынтегральная функция $c = c[x, y, z(x, y)]$.

Однако для обобщения этого частного случая и для применений существенным является то, что для этого интеграла область G должна быть рассматриваема как ориентированная область.

Если часть поверхности F лежит однозначно и над плоскостью y, z или над плоскостью x, z , т. е. если можно изобразить эту часть поверхности с помощью однозначной ветви функции $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$, то мы можем точно таким же образом определить интегралы

$$\iint_F a(x, y, z) dy dz = \iint_{G'} a[x(y, z), y, z] dy dz = \iint_F a(x, y, z) \cos \alpha dF$$

и

$$\iint_F b(x, y, z) dz dx = \iint_{G''} b[x, y(z, x), z] dz dx = \iint_F b(x, y, z) \cos \beta dF,$$

где через G' и G'' мы обозначаем ориентированные проекции ориентированной части поверхности F на соответствующие плоскости координат, а через α и β — углы, образуемые положительной нормалью к поверхности с положительными осями x и y .

Складывая эти выражения, мы получаем распространенный на поверхность F интеграл

$$\begin{aligned} & \iint_F \{ a(x, y, z) dy dz + b(x, y, z) dz dx + c(x, y, z) dx dy \} = \\ & = \iint_F \{ a(x, y, z) \cos \alpha + b(x, y, z) \cos \beta + c(x, y, z) \cos \gamma \} dF. \end{aligned}$$

Обозначая через $\frac{\partial}{\partial o}$ дифференцирование по направлению единичного нормального вектора O , обращенного в положительную сторону, мы можем также писать:

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial o}, \quad \cos \beta = \frac{\partial y}{\partial o}, \quad \cos \gamma = \frac{\partial z}{\partial o},$$

так что интеграл, распространенный на поверхность, может быть представлен в виде:

$$\iint_F \left\{ a \frac{\partial x}{\partial o} + b \frac{\partial y}{\partial o} + c \frac{\partial z}{\partial o} \right\} dF.$$

Если a, b, c являются компонентами вектора A , то выражение, заключенное в скобки, представляет собой компоненту вектора A по направлению положительной нормали к поверхности, и мы можем записать это выражение в виде:

$$A \cdot O = A_0.$$

Пусть теперь поверхность задана с помощью параметрического изображения $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ и пусть ориентированной части поверхности F соответствует ориентированная область B плоскости u, v . Мы можем тогда представить наш интеграл в форме:

$$\iint_B \left\{ a(x, y, z) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + b(x, y, z) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + c(x, y, z) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} du dv,$$

т. е. мы получаем снова выражение нашего поверхностного интеграла с помощью обыкновенного двойного интеграла, распространенного на плоскую область B .

Мы можем теперь легко освободиться от специального предположения относительно положения части поверхности F по отношению к плоскостям координат. Предположим, что ориентированная часть поверхности F может быть разбита с помощью конечного числа гладких дуг на части F_1, F_2, \dots, F_n , таких, что каждая из них удовлетворяет сделанным нами выше специальным предположениям. В том частном случае, когда отдельные части поверхности F или вся эта поверхность расположены перпендикулярно к одной из плоскостей координат, так что проекция на эту плоскость представляет собой уже не двумерную область, а линию, мы можем при вычислении интеграла совершенно не принимать в расчет этой проекции, так как двойной интеграл обращается в нуль, если область интегрирования стягивается в линию. Образуя теперь, согласно данному выше определению поверхностного интеграла, соответствующие интегралы для каждой из частей F_i , мы определяем в качестве интеграла, взятого по всей поверхности F , сумму этих частичных интегралов.

Если поверхность F замкнута, как например шар, то, очевидно, проекции различных частей поверхности F_i частью перекрываются между собой, имея при этом различную ориентировку. Если ограниченная некоторой линией поверхность F в целом одно-однозначно отображена на ориен-

тированную область B плоскости u, v с помощью параметрического изображения $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то остается в силе вышеприведенное параметрическое выражение интеграла, взятого по поверхности, и если пользоваться этим параметрическим выражением, то мы можем при определении нашего интеграла обойтись без разбиения поверхности F .

3. Физическая интерпретация интеграла, распространенного по поверхности. Понятие интеграла, распространенного по поверхности, также может быть физически истолковано с помощью представления стационарного потока в несжимаемой жидкости, заполняющей некоторую часть трехмерного пространства, плотность которой мы предположим равной единице.

Пусть вектор \mathbf{A} является вектором скорости этого потока; тогда величина $\mathbf{A} \cdot \mathbf{O}$ выражает компоненту скорости потока по направлению положительной нормали к поверхности в соответствующей точке; выражение

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{O}) \Delta F = \Delta F \{a(x, y, z) \cos \alpha + b(x, y, z) \cos \beta + c(x, y, z) \cos \gamma\}$ дает приближенное значение количества жидкости, протекающей в единицу времени через элемент поверхности ΔF , с отрицательной стороны поверхности на положительную сторону (причем, понятно, это количество может быть и отрицательным). Поэтому поверхностный интеграл

$$\iint_F \{a \, dy \, dz + b \, dz \, dx + c \, dx \, dy\} = \iint_F A_0 \, dF$$

выражает общее количество жидкости, протекающей через поверхность F в единицу времени с отрицательной стороны на положительную сторону.

Мы видим отсюда, как важно при математическом описании процесса потока отличать положительную сторону поверхности от отрицательной, т. е. приписать поверхности определенную ориентировку.

В других физических приложениях вектор \mathbf{A} означает действующую в точке (x, y, z) силу некоторого поля сил. Вектор \mathbf{A} тогда указывает своим направлением направление так называемой силовой линии, а его модуль дает величину силы в данной точке. Интеграл

$$\iint_F \{a \, dy \, dz + b \, dz \, dx + c \, dx \, dy\}$$

называют при этом способе истолкования полным силовым потоком, проходящим через поверхность с отрицательной стороны на положительную сторону.

4. Объем, ограниченный замкнутой поверхностью¹⁾. Мы можем применить понятие поверхностного интеграла к вычислению объема, заключенного внутри замкнутой ориентированной поверхности; этот объем может быть выражен с помощью интеграла, взятого по поверхности, точно таким же путем, каким мы получили выражение площади плоской области, ограниченной замкнутой кривой, с помощью линейного интеграла, взятого вдоль

¹⁾ Этот номер служит для подготовки и наглядного разъяснения общих рассуждений § 5. Результат, получаемый здесь, непосредственно вытекает из общей формулы следующего параграфа.

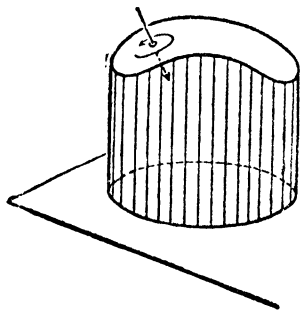
ее границы. Заметим прежде всего, что уже обычное выражение объема, лежащего над областью G плоскости x, y и ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, т. е. интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

может быть рассматриваем как интеграл, распространенный на поверхность. Поверхность F состоит в этом случае из положительно ориентированной области G плоскости x, y , из части поверхности $z=f(x, y)$ и из части проектирующего цилиндра, причем ориентировка остальных частей F непрерывно примыкает к ориентировке G . Мы можем тогда предыдущий интеграл представить в виде интеграла, распространенного на поверхность F , следующим образом:

$$\iint_{+G} f(x, y) dx dy = - \iint_F z dx dy.$$

Отрицательный знак справа объясняется тем, что поверхность F необходимо ориентировать отрицательно относительно ограничиваемого ею объема для того, чтобы проекцией нашей части поверхности на плоскость x, y была положительно ориентированная область $+G$, и не $-G$ (черт. 80). Мы непосредственно убеждаемся в том, что это выражение для объема сохраняет свою силу и в том случае, когда поверхность лежит не над плоскостью x, y , но под этой плоскостью; если при этом мы положительно ориентируем область G плоскости x, y , то этому соответствует отрицательная ориентировка объема, так как ориентировка G образует с внутренней нормалью к поверхности отрицательный винт. Так как интеграл



Черт. 80.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = - \iint_F z dx dy$$

имеет теперь, действительно, отрицательное значение, если его брать по положительно ориентированной области G^1 , то наша формула согласуется с введенным нами раньше соглашением считать объем положительным, если поверхность пробегается положительно, и отрицательным, если поверхность пробегается отрицательно. Поэтому, если мы хотим получить лежащий под плоскостью x, y объем с положительным знаком, то мы должны при интегрировании рассматривать интеграл

$$\iint_{-G} f(x, y) dx dy = - \iint_G f(x, y) dx dy,$$

и мы можем этот интеграл представить так же, как и раньше, в виде интеграла

$$- \iint_F z dx dy,$$

¹⁾ И следовательно, по отрицательно ориентированной поверхности F .

Прим. перев.

распространенного по положительно ориентированной поверхности, ограничивающей данный объем.

Если речь идет о произвольной замкнутой поверхности F , которая может быть разбита на конечное число частей F_1, F_2, \dots, F_m , из которых каждая однозначно проектируется на ориентированную область Q , плоскости x, y , то эта проекция вместе с проектирующим цилиндром и соответствующей частью поверхности ограничивают цилиндрический столбик, объем которого мы должны считать положительным или отрицательным в зависимости от той ориентировки, которую получает поверхность, ограничивающая этот объем. Мы предполагаем при этом, что поверхность F ориентирована положительно относительно замыкаемого ею объема, и устанавливаем этим самым ориентировку каждой части F_i ; эту ориентировку мы продолжаем непрерывным образом вдоль поверхности соответствующего цилиндрического столбика и определяем этим тот знак, с которым мы должны взять его объем. Точно так же, как и для площади плоских кривых (т. I, стр. 214), мы убеждаемся в том, что сумма этих объемов, взятых с правильным знаком, равняется объему, ограниченному поверхностью. С другой стороны, объем каждого такого цилиндрического столбика задается интегралом

$$-\iint_{F_i} z \, dx \, dy,$$

распространенным на часть поверхности F_i . Поэтому, складывая эти интегралы, мы получаем для всего рассматриваемого объема V выражение:

$$V = -\iint_F z \, dx \, dy,$$

причем интеграл должен быть взят по положительно ориентированной поверхности, если объем считается положительным. Точно так же мы получаем, разумеется, для объема и выражения:

$$V = -\iint_F x \, dy \, dz = -\iint_F y \, dz \, dx^1).$$

§ 5. Теоремы Гаусса и Грина в пространстве.

1. Теорема Гаусса и ее физическое значение. С помощью понятия интеграла, распространенного по поверхности, мы можем перенести на трех-

¹⁾ Обратим внимание на то, что при циклической перестановке переменных x, y, z , эти формулы не меняют своего знака, тогда как в соответствующих формулах для площади двумерной области

$$F = \int_R x \, dy = - \int_R y \, dx$$

при перестановке переменных x и y знак перед интегралом меняется на обратный. Это связано с тем, что в случае двух измерений мы при замеченном положительном направлении x положительным направлением y меняем направление вращения плоскости на обратное, тогда как в трехмерном пространстве циклическая перестановка положительных направлений осей координат, т. е. замена x через y , y через z , z через x , не меняет ориентировки системы координат.

мерное пространство теорему Гаусса, доказанную в § 2 для случая двух измерений. В теореме Гаусса для случая двух измерений существенным было то, что интеграл, распространенный на двумерную область, был сведен к линейному интегралу, взятому вдоль границы этой области. Рассмотрим теперь какую-нибудь замкнутую трехмерную область G пространства x, y, z , ограничиваемую поверхностью F , которая, как мы это всегда предполагаем, может быть разбита на конечное число кусков, имеющих всюду на всем своем протяжении непрерывно изменяющуюся касательную плоскость. Предположим далее, что всякая прямая, параллельная какой-нибудь из осей координат и имеющая с G общие внутренние точки, пересекает границу G только в двух точках; от этого последнего допущения мы впоследствии освободимся.

Пусть в области G и на ее границе заданы три непрерывные функции $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ с непрерывными частными производными первого порядка, например три компоненты поля векторов $A = A(x, y, z)$.

Рассмотрим сперва интеграл

$$\iiint_G \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz,$$

распространенный на область G .

Проектируя область G на плоскость x, y , мы получаем в этой плоскости некоторую двумерную область B . Если из какой-нибудь точки (x, y) области B восставить перпендикуляр к плоскости x, y , то он пересекает границу области G в двух точках: точке входа в область G и точке выхода из G . Обозначим через $z_0(x, y)$ координату z точки входа, а через $z_1(x, y)$ координату z точки выхода.

Мы можем тогда всякий объемный интеграл, распространенный по области G , разложить по формуле:

$$\iiint_G f dx dy dz = \iint_B dx dy \int_{z_0}^{z_1} f dz.$$

Для нашего случая $f = \frac{\partial c}{\partial z}$ интеграция по z может быть выполнена и дает

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial c}{\partial z} dz = c(x, y, z_1) - c(x, y, z_0) = c_1 - c_0,$$

так что

$$\iiint_G \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_B c_1 dx dy - \iint_B c_0 dx dy.$$

Если поверхность F ориентирована положительно относительно области G , то противоположные знаки, соответствующие в стоящем справа выражении точкам входа и точкам выхода, будут соблюдены при интегрировании по x и y , если мы соединим интеграл, взятый по частям поверхности,

образованным точками входа, и интеграл, взятый по частям, образованным точками выхода, в один поверхностный интеграл.

$$- \iint_F c(x, y, z) dx dy,$$

распространенный на всю ориентированную поверхность F .

Мы получаем таким образом формулу:

$$\iiint_G \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = - \iint_F c(x, y, z) dx dy.$$

Эта формула остается, очевидно, справедливой и в том случае, когда F содержит цилиндрические части, перпендикулярные к плоскости x, y ; эти части не изменяют величины поверхностного интеграла, ибо при проектировании этих частей на плоскость x, y в проекции получается не двумерная область, а линия.

Составив соответствующие формулы для компонент a и b и сложив эти три формулы, мы получаем общую формулу:

$$\begin{aligned} & \iiint_G \left\{ \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} \right\} dx dy dz = \\ & = - \iint_F \{ a(x, y, z) dy dz + b(x, y, z) dz dx + c(x, y, z) dx dy \}, \end{aligned}$$

которую и называют формулой Гаусса. Применяя обозначения стр. 283 мы можем эту формулу записать также в форме:

$$\iiint_G (a_x + b_y + c_z) dx dy dz = - \iint_F (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) dF.$$

Поверхность F предполагается здесь положительно ориентированной относительно G , и в соответствии с этим α, β, γ означают углы внутренней нормали O с положительными направлениями осей координат.

Легко распространить нашу формулу на области более общего вида. Мы должны только потребовать, чтобы область G можно было бы разбить с помощью конечно о числа поверхностей с непрерывно вращающейся касательной плоскостью на конечное число частичных областей, каждая из которых удовлетворяет поставленному выше требованию, чтобы всякая прямая, имеющая с областью общие внутренние точки, пересекала границу области не более, чем в двух точках. Так как для каждой частичной области формула Гаусса справедлива, то, написав эту формулу для всех этих областей и сложив, мы получим слева тройной интеграл, распространенный на всю область G , тогда как сумма стоящих справа поверхностных интегралов равна интегралу, взятому по поверхности F , ибо интегралы, относящиеся к секущим поверхностям области G , взаимно уничтожаются так же, как это

имело место раньше для случая плоскости (стр. 254 и 266). Наконец заметим еще, что, как и раньше (стр. 266), достаточно потребовать, чтобы граница G состояла из конечного числа частей, однозначно проектирующихся на все три плоскости координат, причем мы впрочем снова допускаем цилиндрические части, имеющие своими проекциями линии.

Из формулы Гаусса получается между прочим в качестве частного случая выведенное в § 4, п° 4 выражение для объема.

Полагая например $a = 0$, $b = 0$, $c = z$, мы непосредственно получаем для объема, ограниченного данной поверхностью, выражение:

$$\iiint_G dx dy dz = - \iint_F z dx dy.$$

Формулу Гаусса в трехмерном пространстве можно так же, как и соответствующую формулу на плоскости, представить формально еще в другом виде.

Для этого мы, с одной стороны, вводим для выражения

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

где a , b , c суть компоненты поля векторов A , употребленное нами уже раньше в главе II, § 7, п° 4 обозначение:

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

а, с другой стороны, мы рассматриваем поверхностный интеграл, согласно сказанному в предыдущем параграфе, как интеграл от компоненты A_o вектора A по внутренней нормали O . Этим путем мы получаем следующее векторное выражение теоремы Гаусса:

$$\iiint_G \operatorname{div} A dx dy dz = - \iint_F A O dF = - \iint_F A_o dF.$$

Для формулы Гаусса в пространстве так же, как и для случая двумерной плоскости, целесообразно ввести вместо положительной внутренней нормали O внешнюю нормаль.

Обозначая внешний единичный нормальный вектор через n , так что

$$n = - O,$$

мы должны, введя в нашу формулу n вместо O , изменить знак перед интегралом в правой части. Мы можем теперь писать формулу Гаусса так:

$$\iiint_G \operatorname{div} A dx dy dz = \iint_F A_n dF = \iint_F A \cdot n dF,$$

или же, обозначая аналогично предыдущему косинусы углов внешней нормали \mathbf{n} с положительными осями координат через $\frac{\partial x}{\partial n}$, $\frac{\partial y}{\partial n}$, $\frac{\partial z}{\partial n}$:

$$\iiint_G (a_x + b_y + c_z) dx dy dz = \iint_F \left(a \frac{\partial x}{\partial n} + b \frac{\partial y}{\partial n} + c \frac{\partial z}{\partial n} \right) dF.$$

Наглядную интерпретацию теоремы Гаусса мы получим так же, как и для случая плоскости, рассматривая вектор \mathbf{A} как поле скоростей стационарного потока в несжимаемой жидкости, плотность которой равна единице. Общее количество жидкости, проходящей в единицу времени через малую часть поверхности ΔF изнутри объема G наружу, приближенно равняется $\Delta F A_n$, где A_n означает компоненту вектора скорости \mathbf{A} по направлению нормали \mathbf{n} к элементу поверхности ΔF в произвольной точке этого элемента. Соответственно этому мы получаем для общего количества жидкости, протекающей в единицу времени через часть поверхности F изнутри наружу, следующее выражение с помощью интеграла, распространенного на эту часть поверхности:

$$\iint_F A_n dF.$$

Таким образом при этой интерпретации правая часть формулы Гаусса выражает количество жидкости, вытекающей из области G в единицу времени. Это выражение для количества жидкости преобразовывается в интеграл от дивергенции, распространенный по области G , что приведет к наглядному истолкованию выражения $\text{div } \mathbf{A}$. Так как мы предполагаем поток несжимаемым и стационарным, т. е. независимым от времени, то общее количество вытекающей жидкости должно непрерывно возмещаться, т. е. внутри области должны находиться „источники“, производящие положительное или отрицательное количество материи. Стоящий справа поверхностный интеграл выражает полную силу источников области G ; разделив на объем этой области, мы получаем среднюю силу источников в области G . Представляя себе область G неограниченно стягивающейся к точке, так что диаметр области стремится к нулю т. е. другими словами, дифференцируя по области G этот поверхностный интеграл или равносильный ему тройной интеграл

$$\iiint_G \text{div } \mathbf{A} dx dy dz,$$

мы получим удельную силу источника в соответствующей точке; с другой стороны, что дифференцирование дает значение подынтегральной функции $\text{div } \mathbf{A}$ в этой точке, следовательно дивергенция вектора потока \mathbf{A} равна удельной силе источника стационарного и несжимаемого потока, изображаемого вектором \mathbf{A} .

Особый интерес представляют такие поля потоков \mathbf{A} , в которых отсутствуют источники, т. е. внутри которых жидкость нигде не возникает и ни-

где не уничтожается. Такой поток характеризуется тем, что для него всюду удовлетворяется уравнение:

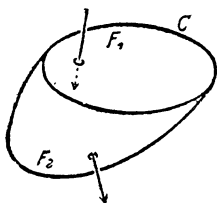
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

В этом случае интеграл от компоненты вектора \mathbf{A} по внешней нормали, распространенный по любой замкнутой поверхности F , всегда равен нулю, т. е.

$$\iint_F \mathbf{A}_n dF = 0,$$

для любой замкнутой поверхности F .

Этот факт мы можем истолковать также и в несколько иной форме. Представим себе, что через ориентированную замкнутую кривую C прове-



Черт. 81.

дены две поверхности F_1 и F_2 , которые вместе ограничивают односвязную пространственную область G . Применим теорему Гаусса к этой области G . При этом мы будем считать для поверхности F_1 положительным направлением нормали не внешнюю нормаль, а нормаль, направленную внутрь области G , для того чтобы направление обхода линии C и положительное направление нормали составляли положительный винт как для поверхности F_1 , так и для поверхности F_2 . Мы должны тогда в формуле Гаусса обе части поверхности F_1

и F_2 взять с разными знаками, так что

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \iint_{F_1} \mathbf{A}_n dF - \iint_{F_2} \mathbf{A}_n dF.$$

Так как левая часть, по предположению, равна нулю, то мы получаем:

$$\iint_{F_1} \mathbf{A}_n dF = \iint_{F_2} \mathbf{A}_n dF.$$

Словами мы можем выразить эту формулу так: во всяком потоке, не имеющем источников, через две поверхности, проведенные через одну и ту же замкнутую кривую C , в единицу времени проходит одно и то же количество жидкости. Это количество жидкости не зависит таким образом от специального выбора поверхности F , натянутой на данную замкнутую кривую C ; оно зависит следовательно исключительно от выбора линии C . Это приводит к задаче выразить это количество жидкости с помощью кривой C . Мы разрешим эту задачу в следующем параграфе на основании теоремы Стокса.

2. Теоремы Грина. Из формулы Гаусса мы выведем так же, как и в случае двух независимых переменных, несколько важных следствий, известных под названием формул Грина. Мы приходим к этим формулам, приме-

няя теорему Гаусса (в ее векторной форме) к полю векторов \mathbf{A} , имеющему специальный вид:

$$\mathbf{A} = u \operatorname{grad} v,$$

так что компоненты \mathbf{A} суть uv_x , uv_y , uv_z .

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} (uv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (uv_y) + \frac{\partial}{\partial z} (uv_z),$$

а вдоль границы

$$\mathbf{A}_n = u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Мы получаем тогда непосредственно из теоремы Гаусса, пользуясь обычным обозначением:

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz},$$

формулу Грина:

$$\iiint_G (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) dx dy dz = - \iiint_G u \Delta v dx dy dz + \iint_F \frac{\partial v}{\partial n} u dF.$$

Рассматривая далее поле векторов $\mathbf{A} = v \operatorname{grad} u$, напомним формулу Грина для этого поля:

$$\iiint_G (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) dx dy dz = - \iiint_G v \Delta u dx dy dz + \iint_F \frac{\partial u}{\partial n} v dF.$$

Вычитая второе равенство из первого, мы получаем вторую формулу Грина:

$$\iiint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz = \iint_F \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF.$$

§ 6. Теорема Стокса в пространстве.

1. Формулировка и доказательство. Мы видели в предыдущем параграфе, что если дивергенция поля векторов равна нулю, то интеграл от компоненты по нормали, распространенный на часть поверхности, ограниченную замкнутой кривой C , зависит исключительно от кривой C , но не зависит от специального выбора поверхности, проведенной через C . Чтобы выяснить характер зависимости этого интеграла от кривой C , возьмем такое векторное поле, для которого обращение в нуль дивергенции непосредственно очевидно.

Именно, предположим, что поле векторов \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

где \mathbf{B} означает второе поле векторов с компонентами $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ ¹⁾; компоненты \mathbf{A} задаются формулами:

$$a(x, y, z) = \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad b(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad c(x, y, z) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

тогда, действительно (стр. 85)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0.$$

Рассмотрим теперь ориентированную часть поверхности F , ограниченную ориентированной кривой C , и постараемся преобразовать распространенный по поверхности F интеграл

$$\iint_F A_n dF = \iint_F (a dy dz + b dz dx + c dx dy)$$

в выражение, зависящее исключительно от границы C поверхности F . Для этой цели представим себе, что эта поверхность задана в параметрическом виде с помощью двух параметров u и v обычным образом, причем рассматриваемой части поверхности соответствует на плоскости u, v замкнутая область B . Преобразуя наш интеграл, распространенный по поверхности F , в интеграл, распространенный на область B , мы получаем согласно нашему общему правилу выражение:

$$\begin{aligned} \iint_F \{a dy dz + b dz dx + c dx dy\} &= \iint_B \left\{ \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right\} du dv, \end{aligned}$$

Стоящее справа выражение мы можем преобразовать, соединяя под знаком интеграла члены, содержащие φ , ψ и χ .

Так например мы получаем для членов, содержащих φ :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Прибавив сюда еще тождественно равное нулю выражение

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

мы получим для членов, содержащих φ , следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) - \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned}$$

¹⁾ В дополнениях к настоящей главе будет доказано, что всякое поле векторов \mathbf{A} для которого $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, всегда может быть представлено в виде:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Таким же образом мы получаем под знаком двойного интеграла два дальнейших члена

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Итак наш двойной интеграл равен сумме трех интегралов от выражений:

$$\frac{\partial(\varphi, x)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\psi, y)}{\partial(u, v)} \text{ и } \frac{\partial(\chi, z)}{\partial(u, v)},$$

распространенных на ориентированную область B , границу которой, ориентированную соответственно ориентировке линии C , мы обозначаем через R . Но согласно теореме Гюсса и выведенному из нее следствию для случая двух измерений (стр. 270)

$$\iint_B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv = \int_R \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial u} du + \varphi \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = \int_C \varphi \frac{dx}{ds} ds,$$

причем области интегрирования должны быть взяты с соответствующей ориентировкой, а возрастание длины дуги s вдоль C соответствует обходу кривой по направлению ее ориентировки.

Прибавляя к этой формуле две другие соответствующие формулы, мы получим слева рассматриваемый поверхностный интеграл, справа интеграл:

$$\int_C \left(\varphi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds} + \chi \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Выражение $\varphi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds} + \chi \frac{dz}{ds}$ равняется тангенциальной компоненте B_t вектора B , направленной по положительной касательной ориентированной кривой C , и мы получаем таким образом формулу Стокса

$$\iint_F (\operatorname{rot} B)_n dF = \int_C B_t ds,$$

или, в более подробной записи:

$$\begin{aligned} \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy \right\} = \\ = \int_C (\varphi dx + \psi dy + \chi dz). \end{aligned}$$

Эта формула преобразовывает стоящий слева интеграл, распространенный по ориентированной поверхности F , в криволинейный интеграл, взятый вдоль соответственно ориентированной границы этой поверхности. Эта формула справедлива, если вектор $A = \operatorname{rot} B$ непрерывен в рассматриваемой области, а часть поверхности F состоит из одной или нескольких частей, которые могут быть представлены вышеуказанным образом в параметриче-

ском виде с помощью функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, имеющих непрерывные первые производные.

2. Физическое значение теоремы Стокса. Физическое значение теоремы Стокса в трехмерном пространстве аналогично уже рассмотренному раньше физическому истолкованию теоремы Стокса для случая двух измерений¹⁾.

Мы опять истолковываем поле векторов \mathbf{B} как поле скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости и называем интеграл $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$, взя-

тый вдоль кривой C , циркуляцией потока вдоль этой кривой. Теорема Стокса говорит: циркуляция вдоль кривой равняется интегралу от компоненты ротора по положительной нормали, взятому по произвольной поверхности натянутой на заданную ориентированную кривую, причем эта поверхность должна быть ориентирована соответственно ориентировке ограничивающей ее кривой. Если разделить интеграл, взятый по поверхности, на площадь этой поверхности и произвести предельный переход, стягивая поверхность и ограничивающую ее кривую в точку, то мы получим этим процессом дифференцирование по области компоненту ротора по направлению нормали в той точке поверхности, в которую мы стягиваем кривую C . Мы видим таким образом, что компоненту ротора по направлению положительной нормали к поверхности следует рассматривать как удельную циркуляцию или плотность циркуляции потока по поверхности вокруг данной точки, причем направление циркуляции образует с положительной нормалью положительный винт²⁾.

Если же мы будем истолковывать вектор \mathbf{B} как поле механической или электрической силы, то криволинейный интеграл в правой части теоремы Стокса выражает работу, производимую силой, когда в ее поле перемещается вдоль кривой точка, подвергающаяся действию этой силы. Теорема Стокса преобразовывает выражение для этой работы в интеграл, распространенный по поверхности, натянутой на заданную кривую, и подынтегральная функция этого интеграла равна нормальной составляющей вихря или ротора данного поля сил.

С помощью теоремы Стокса мы можем получить новое доказательство основной теоремы относительно криволинейных интегралов в пространстве (ср. также стр. 268, примечание 2). Основной вопрос заключается в том, какому условию должно удовлетворять поле векторов \mathbf{B} , для того чтобы интеграл от тангенциальной компоненты вектора, взятый вдоль произвольной замкнутой кривой, всегда обращался в нуль. Теорема Стокса дает нам новое доказательство того, что обращение в нуль этого интеграла обеспечено, если ротор нашего векторного поля равен нулю³⁾. Обращение в нуль ротора

¹⁾ Обратим между прочим внимание на то обстоятельство, что для случая двух измерений теоремы Гаусса и Стокса формально отличаются одна от другой только знаком, тогда как для трех измерений эти две теоремы существенно отличаются между собою не только по своему наглядному выражению, но и по своей формальной природе.

²⁾ Между прочим наши рассуждения показывают, что ротор вектора, действительно, имеет значение, не зависящее от системы координат, и поэтому может рассматриваться как вектор.

³⁾ При этом предполагается впрочем, что на заданную кривую, действительно, можно натянуть поверхность рассмотренного вида. Так как это обстоятельство при-

или, как мы говорим, отсутствие вихрей в векторном поле является поэтому достаточным и в то же время необходимым, как мы видели в § 1, условием обращения в нуль взятого вдоль замкнутой кривой интеграла от тангенциальной компоненты вектора. Поле векторов \mathbf{B} может быть в этом случае представлено, как было показано в § 1, в виде градиента некоторой функции $f(x, y, z)$:

$$\mathbf{B} = \text{grad } f.$$

Если наше векторное поле не имеет ни вихрей, ни источников, то его дивергенция обращается в нуль, и функция f удовлетворяет уравнению:

$$\text{div grad } f = 0,$$

или в более подробной записи:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Мы получаем таким образом для скалярной величины f , которую мы называем согласно нашим прежним определениям потенциалом вектора \mathbf{B} , „дифференциальное уравнение потенциала“:

$$\Delta f = 0,$$

с которым мы встречались уже раньше и которое принадлежит к числу самых важных дифференциальных уравнений анализа.

§ 7. Замечания общего характера относительно связи между дифференцированием и интегрированием для случая многих переменных.

Полезно осветить с общей точки зрения различные факты, установленные в настоящей главе.

Для случая одной независимой переменной мы формулировали в томе I, главе II, взаимную связь между дифференцированием и интегрированием в виде основной теоремы дифференциального и интегрального исчисления. Эта основная теорема для случая одной независимой переменной гласит следующим образом: если $f(x)$ есть функция непрерывная в замкнутой области $a \leq x \leq b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ есть примитивная функция от функции $f(x)$; обратно, для всякой функции $F(x)$, имеющей непрерывную производную, мы можем построить функцию $f(x) = F'(x)$, удовлетворяющую предыдущему равенству. Существенной является теперь для нас первая часть основной теоремы, т. е.

водит в особых случаях к трудностям и усложнениям, например для кривых, имеющих узловые точки, то следует предпочесть доказательство основной теоремы, приведенное в § 1.

превращение интеграла, распространенного на одномерную область, в выражение $F(b) - F(a)$, зависящее только от конечных точек промежутка интегрирования или, как мы скажем, от области нулевого измерения. Другими словами, если подынтегральное выражение задано в виде производной от некоторой функции $F(x)$, то интеграл, распространенный на одномерную область, может быть преобразован в выражение, составленное с помощью функции $F(x)$ и зависящее только от границы этой области.

Различные теоремы, доказанные нами относительно интегралов, распространенных на многомерные области, дают нам нечто вполне аналогичное этой основной теореме для случая одной независимой переменной. Речь идет каждый раз о том, чтобы интеграл, распространенный на какую-нибудь расположенную в заданном пространстве область интегрирования, будь это кривая, поверхность или объем, превратить в выражение, зависящее только от границы этой области. Так например теорема Гаусса для случая двух измерений гласит:

$$\iint_G (a_x + b_y) dx dy = \int_K (a dy - b dx),$$

и мы можем эту теорему формулировать так: если подынтегральная функция интеграла $\iint_G f(x, y) dx dy$, распространенного на замкнутую область G ,

может быть представлена в виде:

$$f(x, y) = a_x(x, y) + b_y(x, y),$$

то двойной интеграл может быть преобразован в выражение, зависящее исключительно от одномерной границы данной двумерной области интегрирования, а именно в линейный интеграл, взятый вдоль границы. Таким образом с помощью теоремы Гаусса число измерений области интегрирования понижается на единицу. Вместо рассмотренного выше выражения $F(b) - F(a)$ мы здесь получаем криволинейный интеграл, взятый вдоль границы плоской области. Мы, правда, не можем больше говорить о примитивной функции F подынтегрального выражения; одной примитивной функции F здесь в известном смысле соответствует поле векторов с компонентами $a(x, y)$ и $b(x, y)$; с другой стороны, для применимости теоремы Гаусса требуется, чтобы подынтегральное выражение двойного интеграла могло бы быть получено с помощью известных процессов дифференцирования, а именно чтобы оно могло быть представлено в виде суммы производной по x и производной по y . Требование возможности такого изображения подынтегральной функции f оставляет еще большой произвол для примитивного поля векторов a, b , тогда как для подынтегральной функции простого однократного интеграла примитивная функция $F(x)$ определяется однозначно с точностью до произвольной аддитивной постоянной¹⁾. Для

4) Для заданной подынтегральной функции $f(x, y)$ мы можем бесконечным числом способов найти две функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, удовлетворяющие вышенаписанному уравнению; так мы можем например $b(x, y)$ положить равно нулю или какой угодно произвольной функции и затем определить $a(x, y)$ из уравнения $a_x = f - b_y$, взяв в качестве $a(x, y)$ какой-нибудь неопределенный интеграл от функции $f(x, y) - b_y(x, y)$ по переменной x , рассматривая при неопределенном интегрировании y как постоянный параметр.

случая $n = 2$ существует, кроме теоремы Гаусса и равносильной ей по существу теоремы Стокса, еще другое обобщение основной теоремы, а именно основная теорема о криволинейных интегралах. В двумерном пространстве мы имеем замкнутые одномерные многообразия, имеющие граничные точки, т. е. кривые линии с двумя конечными точками, и задача заключается в превращении криволинейного интеграла в выражение, зависящее только от граничных точек. Основная теорема относительно криволинейных интегралов говорит, что превращение в подобное выражение возможно тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение может быть представлено с помощью примитивной функции $U(x, y)$ в виде

$$t \operatorname{grad} U,$$

где t означает единичный тангенциальный вектор, причем интегрирование производится по длине дуги s . Значение интеграла задается тогда формулой:

$$\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} t \operatorname{grad} U ds = U(\xi, \eta) - U(\xi_0, \eta_0),$$

что, очевидно, аналогично обстоятельствам, имеющим место при $n = 1$.

Преобразование криволинейного интеграла

$$\int_C (a dx + b dy)$$

в выражение, зависящее только от концов пути интегрирования, удается поэтому тогда и только тогда, когда вектор A с компонентами a и b может быть представлен в виде градиента некоторого потенциала. Сравнивая с основной теоремой интегрального исчисления, мы видим, что здесь представление подынтегрального выражения в виде производной заменяется представлением подынтегрального вектора в виде градиента, причем роль примитивной функции здесь играет потенциал этого градиента. Существенным отличием по сравнению с предыдущим случаем является здесь то, что не для всякого криволинейного интеграла подынтегральное выражение может быть представлено в виде градиента, но для того чтобы такое представление было возможно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие интегрируемости $a_y = b_x$.

Совершенно аналогично обстоит дело и в случае трех независимых переменных. Теорема Гаусса превращает тройной интеграл, распространенный на ограниченную замкнутой поверхностью трехмерную область, в интеграл, взятый по границе, т. е. вместо трехмерной области интегрирования, имеющей границу, мы получаем вложенную в трехмерное пространство замкнутую и не имеющую границы двумерную область интегрирования.

Это преобразование связано с тем, что мы представляем подынтегральное выражение тройного интеграла в виде дивергенции поля векторов a, b, c , и это векторное поле здесь снова играет в известном смысле роль примитивной функции ¹⁾.

¹⁾ Совершенно таким же образом, как и для случая двух независимых переменных, можно и здесь для произвольной подынтегральной функции всегда найти, и притом бесконечным числом способов, соответствующее ей примитивное поле векторов.

Для криволинейных интегралов в случае трех независимых переменных дело обстоит точно так же, как и для двух независимых переменных, и не требует особых дальнейших пояснений.

Между криволинейным интегралом и тройным интегралом в случае трех независимых переменных находится интеграл, распространенный по поверхности, ограниченной замкнутой кривой. Здесь превращение такого поверхностного интеграла в интеграл, распространенный вдоль границы поверхности, осуществляется с помощью теоремы Стокса, доказанной в § 6. Процессом дифференцирования, посредством которого должно быть образовано подынтегральное выражение для того, чтобы было возможно применять теорему Стокса, является построение ротора векторного поля, и это векторное поле играет здесь роль примитивной функции.

Здесь дело обстоит так же, как и для криволинейных интегралов, а именно: для того чтобы подынтегральное выражение интеграла

$$\iint_F (a \, dy \, dz + b \, dz \, dx + c \, dx \, dy),$$

взятого по поверхности F , могло бы быть представлено в виде нормальной компоненты ротора, необходимо во всяком случае выполнение условия:

$$a_x + b_y + c_z = 0.$$

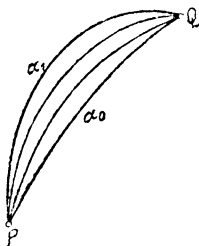
Таким образом превращение поверхностного интеграла, в интеграл, взятый вдоль границы, не всегда возможно. Впрочем вышеупомянутое необходимое условие является также и достаточным¹⁾.

Если число независимых переменных больше трех, то имеют место совершенно аналогичные обстоятельства, на которых мы здесь однако останавливаться не будем.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ V.

§ 1. Замечания к теоремам Стокса и Гаусса.

В предыдущей главе мы при доказательстве теорем Стокса и Гаусса исходили из интегралов, распространенных на рассматриваемую многомерную область, и превращали их после выполнения однократных интегрирований в интегралы, распространенные вдоль границы. Но можно получить эти теоремы, идя обратным путем.



Черт. 82.

Мы здесь вкратце изложим соответствующие преобразования, которые сами по себе очень поучительны.

Чтобы получить например теорему Стокса на плоскости, возьмем на плоскости две постоянные точки P и Q и соединим их между собою линией C . Представим себе, что эта линия C , заданная в параметрическом виде с помощью параметра t , непрерывным образом деформируется и притом так, что в процессе этой деформации кривая C , переходя из некоторого начального положения в конечное, однократно покрывает некоторую область G . Аналитически мы вы-

¹⁾ Доказательство этого предложения см. в дополнениях, § 2.

ражаем это обстоятельство следующим образом: пусть кривая C , зависящая от параметра α , задана в параметрическом виде с помощью уравнений:

$$x = x(t, \alpha), \quad y = y(t, \alpha), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

причем

$$x(t_0, \alpha), \quad y(t_0, \alpha) \text{ и } x(t_1, \alpha), \quad y(t_1, \alpha)$$

означают независимые от α координаты обеих неподвижных точек P и Q . Когда α пробегает интервал $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, наша кривая покрывает некоторую замкнутую область G . Мы предполагаем, что наши функции $x(t, \alpha)$ и $y(t, \alpha)$ имеют непрерывные производные по t и по α и кроме того имеют непрерывные смешанные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \alpha} = x_{t\alpha}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \alpha} = y_{t\alpha}$$

и, далее, что в области G , за исключением точек P и Q , функциональный определитель $\frac{\partial(x, y)}{\partial t, \alpha}$ повсюду отличен от нуля и например положителен.

Тогда область G , если не считать точек P и Q , одно-однозначно отображена на прямоугольник $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad t_0 \leq t \leq t_1$ плоскости α, t .

Предположим теперь, что в замкнутой области G заданы две функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, имеющие непрерывные производные, и рассмотрим криволинейный интеграл

$$J(\alpha) = \int_{C_\alpha} a(x, y) dx + b(x, y) dy = \int_{t_0}^{t_1} (ax_t + by_t) dt.$$

взятый вдоль кривой C_α , соответствующей параметру α . Поставим себе задачей исследовать этот интеграл $J(\alpha)$ в его зависимости от α . Для этого образуем согласно правилам дифференцирования интеграла по параметру производную.

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} [(a_x x_t + a_y y_t) x_\alpha + (b_x x_t + b_y y_t) y_\alpha + a x_{t\alpha} + b y_{t\alpha}] dt.$$

Интегрируя по частям, мы получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (a x_{t\alpha} + b y_{t\alpha}) dt &= [a x_\alpha + b y_\alpha]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (a_t x + b_t y_\alpha) dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} [(a_x x_t + a_y y_t) x_\alpha + (b_x x_t + b_y y_t) y_\alpha] dt, \end{aligned}$$

ибо, по условию, x_α и y_α при $t = t_0$ и $t = t_1$ обращаются в нуль.

Отсюда мы получаем:

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} [a_y(y_\alpha x_t - y_t x_\alpha) + b_x(x_\alpha y_t - x_t y_\alpha)] dt,$$

т. е.

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} (a_y - b_x) \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \alpha)} dt d\alpha.$$

Интегрируя это последнее равенство по α в пределах от α_0 до α_1 , мы получаем:

$$J(\alpha_1) - J(\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_{t_0}^{t_1} (a_y - b_x) \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \alpha)} dt d\alpha$$

или, введя справа вместо переменных t и α переменные x и y , мы получаем:

$$J(\alpha_0) - J(\alpha_1) = \iint_G (b_x - a_y) dx dy.$$

Но слева стоит как раз криволинейный интеграл $\int \{a dx + b dy\}$, взятый вдоль границы $C_{\alpha_0} - C_{\alpha_1}$ области G , и мы таким образом получили при выполнении наших условий теорему Стокса на плоскости.

Мы предоставляем читателю вывести по точно такому же образцу формулу Стокса в пространстве. Теорема Гаусса в пространстве также получается аналогичным путем, если исходить из интеграла, распространенного по поверхности, ограниченной замкнутой кривой, и деформировать эту поверхность так, чтобы она покрыла некоторую трехмерную область G .

Заметим однако, что этот способ доказательства наших теорем не дает нам сам по себе всего того, что нами было получено с помощью раньше приведенных доказательств.

Для того чтобы этого достигнуть, мы должны были бы например в отношении теоремы Стокса на плоскости доказать, что всякая область, для которой выполняются условия, введенные нами при прежнем доказательстве этой теоремы, может быть вышеуказанным способом покрыта семейством кривых C_α , удовлетворяющих перечисленным выше требованиям непрерывности и дифференцируемости. Такое доказательство принципиально возможно, но все же достаточно сложно, и мы должны отдать предпочтение нашему прежнему способу доказательства этих теорем.

§ 2. Изображение векторного поля, не имеющего источников, в виде ротора.

Исходный пункт проведенного в § 6 главы V доказательства теоремы Стокса в пространстве, естественно, приводит к вопросу, можно ли представить в виде ротора всякое поле векторов, не имеющее источников, т. е.

всякое поле векторов A , для которого выражение $\operatorname{div} A$ обращается в нуль в некоторой области G пространства x, y, z , т. е. действительно ли для всякого вектора A , для которого $\operatorname{div} A = 0$, существует такой другой вектор B , что

$$A = \operatorname{rot} B.$$

Мы здесь покажем, что это действительно так.

Если $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ и $c(x, y, z)$ суть компоненты вектора A , то речь идет о том, чтобы найти вектор B с компонентами $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$, удовлетворяющими в G трем уравнениям:

$$a = w_y - v_z; \quad b = u_z - w_x; \quad c = v_x - u_y.$$

Простоты ради мы предположим, что область G , в которой определен вектор A и выполняется условие $a_x + b_y + c_z = 0$, представляет собой параллелепипед. При определении вектора B у нас еще остается большой произвол, и мы можем его например так определить, чтобы третья компонента $w(x, y, z)$ всюду обращалась в нуль. При этом предположении мы получаем уравнения:

$$a = -v_z; \quad b = u_z; \quad c = v_x - u_y.$$

Первое уравнение будет удовлетворено, если мы положим

$$v = - \int_{z_0}^z a(x, y, \xi) d\xi,$$

где при интегрировании величины x и y играют роль постоянных параметров, а z_0 , как и в дальнейшем y_0 , означают координаты z и y произвольной постоянной точки области G . Второе из наших уравнений будет удовлетворено, если мы положим

$$u = \int_{z_0}^z b(x, y, \xi) d\xi + a(x, y),$$

где $a(x, y)$ означает произвольную, пока еще совершенно неопределенную функцию от x и y .

Мы можем теперь благодаря выполнению условия

$$a_x + b_y = -c_z$$

удовлетворить также и третьему уравнению.

Мы получаем сперва уравнение:

$$c = v_x - u_y = - \int_{z_0}^z [a_x(x, y, \xi) + b_y(x, y, \xi)] d\xi - a_y(x, y),$$

откуда в силу соотношения $a_x + b_y = -c_z$ мы получаем;

$$c(x, y, z) = \int_{z_0}^z c_z(x, y, \xi) d\xi - a_y(x, y) = c(x, y, z) - c(x, y, z_0) - a_y(x, y).$$

Из этого уравнения мы определяем введенную сперва произвольно функцию $a(x, y)$, полагая:

$$a_y = -c(x, y, z_0),$$

и

$$a = - \int_{y_0}^y c(x, \eta, z_0) d\eta.$$

Найденные нами компоненты вектора B

$$u = \int_{z_0}^z b(x, y, \zeta) d\zeta - \int_{y_0}^y c(x, \eta, z_0) d\eta.$$

$$v = - \int_{z_0}^z a(x, y, \zeta) d\zeta,$$

$$w = 0,$$

решают нашу задачу. Самое общее решение задачи мы получим, образуя с помощью произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(x, y, z)$ три функции

$$U = u + \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$V = v + \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$W = w + \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Непосредственно очевидно, что вектор $B^* = B + \text{grad } \Phi$ с компонентами U, V, W действительно удовлетворяет нашему требованию.

Но и обратно, если B^* есть произвольный вектор, удовлетворяющий условию:

$$\text{rot } B^* = A,$$

то

$$\text{rot } (B^* - B) = 0.$$

Следовательно векторное поле $B^* - B$ не имеет вихрей и поэтому может быть представлено, согласно главе V, § 1, в виде градиента некоторой функции $\Phi(x, y, z)$, что и доказывает наше утверждение.

ГЛАВА VI.

ПРИМЕНЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ.

Полученные нами общие результаты открывают широкое поле для различных приложений. В настоящей главе мы хотим с помощью нескольких типичных примеров открыть доступ к некоторым из областей применения дифференциального и интегрального исчисления. Для более подробного ознакомления с этим предметом мы должны отослать читателя к трудам по дифференциальным уравнениям и механике.

§ 1. Дифференциальные уравнения механики материальной точки.

1. Уравнения движения. Уже в первом томе (гл. V, § 4 и 5) мы занимались движением материальной точки, предполагая, что движение происходит по заданной заранее кривой. Отбрасывая теперь это ограничение, мы снова рассматриваем массу m , которую мы представляем себе сосредоточенной в точке с прямоугольными координатами x, y, z .

Обозначим через \vec{x} радиус-вектор материальной точки, имеющий своими компонентами координаты x, y, z .

Тогда движение материальной точки задается математически путем представления координат x, y, z или радиуса-вектора \vec{x} в виде функций от времени t . Если мы будем обозначать, как мы это делали раньше, дифференцирование по t поставленной сверху точкой, то вектор \vec{x} с компонентами $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и модулем $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ и вектор $\ddot{\vec{x}}$ с компонентами $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ изображают скорость и ускорение движения.

Не останавливаясь здесь на рассмотрении по существу основных принципов механики, положим в основу следующие определения и факты. Назовем произведение вектора ускорения $\ddot{\vec{x}}$ на массу m вектором силы \vec{k} , так что

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{k}.$$

Компоненты этого вектора силы или просто силы мы обозначим через:

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \quad Z = m\ddot{z}.$$

Эти три уравнения называются ньютоновыми основными уравнениями механики. С нашей точки зрения они представляют собой пока лишь определение слова „сила“. Однако оказывается, что во многих случаях этот вектор силы можно определить заранее, еще не знав

самого закона изучаемого движения, путем задания на основании известных физических предположек некоторого поля сил в пространстве. Тогда мы можем рассматривать основные уравнения механики с совершенно иной точки зрения.

Они представляют собой теперь условия, которым должно удовлетворять ускорение всякого специального движения, которое происходит под влиянием заданного поля сил.

Таким полем сил является например поле силы тяжести. Если сила тяжести действует по направлению отрицательной оси z , то мы заранее знаем компоненты этой силы тяжести

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg,$$

где g есть постоянное ускорение земной силы тяжести (т. I, гл. V, § 4).

Другой пример дает нам поле сил, создаваемое массой μ , сосредоточенной в начале координат и притягивающей по закону Ньютона. Если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть расстояние точки x, y, z с массой m от начала, то поле сил задается в этом случае выражением:

$$k = \mu m x \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

и основной закон Ньютона гласит в данном случае:

$$\ddot{x} = \mu x \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

или, переходя к компонентам:

$$\ddot{x} = -\mu x \frac{x}{r^3},$$

$$\ddot{y} = -\mu y \frac{y}{r^3},$$

$$\ddot{z} = -\mu z \frac{z}{r^3}.$$

Вообще, если k есть заданное поле сил, компоненты которого задаются в виде функций координат точки (x, y, z) :

$$X = X(x, y, z); \quad Y = Y(x, y, z); \quad Z = Z(x, y, z),$$

то уравнения движения

$$m\ddot{\alpha} = k$$

или

$$m\ddot{x} = X,$$

$$m\ddot{y} = Y,$$

$$m\ddot{z} = Z,$$

представляют собой „систему трех дифференциальных уравнений“ с тремя неизвестными функциями $x(t), y(t), z(t)$.

Основная проблема механики материальной точки заключается в том, чтобы из этих дифференциальных уравнений определить действительное движение материальной точки, если в начальный момент движения, например при $t=0$, заданы положение материальной точки, т. е. ее координаты

$$x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0)$$

и ее начальная скорость, т. е. величины

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0), \dot{y}_0 = \dot{y}(0) \text{ и } \dot{z}_0 = \dot{z}(0).$$

Задачу разыскания трех функций, удовлетворяющих этим начальным условиям при $t=0$ и данным трем дифференциальным уравнениям при всех значениях t , называют задачей решения или интегрирования ¹⁾ системы дифференциальных уравнений.

2. Принцип сохранения энергии. Прежде чем перейти к тому, чтобы на отдельных примерах выполнить интегрирование этой системы дифференциальных уравнений, мы предположим ряд общих положений, вытекающих из уравнений движения. Мы уже знакомы с понятием работы, производимой при движении полем сил (гл. V, § 1, п^о 2); мы знаем, что эта работа выражается криволинейным интегралом:

$$\int k \dot{x} dt = \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

взятым вдоль пути, описанного материальной точкой.

В том случае, когда поле сил может быть представлено в виде градиента потенциала:

$$k = \text{grad } \Phi,$$

работа, произведенная при движении, не зависит от пути, но зависит исключительно от начальной и конечной точек пути (гл. V, § 1, п^о 3). Поле сил, которое может быть представлено в виде градиента потенциала, называют согласно Гельмгольцу консервативным ²⁾ полем сил. Если задано такое поле, то мы можем записать уравнение движения в векторной форме:

$$m\ddot{x} = -\text{grad } U,$$

если мы вместо потенциала Φ , определенного впрочем только с точностью до произвольной аддитивной постоянной, введем так называемую потенциальную энергию $U = -\Phi$. Переходя к координатам, мы получаем:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -U_x, \\ m\ddot{y} &= -U_y, \\ m\ddot{z} &= -U_z. \end{aligned}$$

¹⁾ Употребление этого термина объясняется тем, что решение таких дифференциальных уравнений может быть в известном смысле рассматриваемо как обобщение процесса обыкновенного интегрирования.

²⁾ Термин „консервативность“ берется от латинского глагола *conservare* — сохранять и употребляется здесь в связи с принципом сохранения энергии, который будет сейчас нами доказан.

Эту систему дифференциальных уравнений мы не можем, правда, полностью разрешить в общем виде, но мы можем вывести из нее новое уравнение, которое уже не содержит вторых, но содержит только первые производные искомым функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. С помощью векторных обозначений это рассмотрение может быть проведено следующим образом: умножим уравнение

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad } U$$

скалярно на $\dot{\mathbf{x}}$.

Тогда слева мы получаем производную выражения $\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{m}{2} v^2$ по t , а справа — производную функции $-U$ по t (стр. 81), и, интегрируя, мы получаем:

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 = -U + c,$$

где c есть постоянная, т. е. не зависящая от времени t величина. Если не пользоваться векторными обозначениями, то мы придем к тому же результату, умножая три уравнения движения соответственно на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} и складывая почленно полученные уравнения; мы получаем тогда слева производную по t от величины

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Полученное нами таким путем уравнен

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U = c$$

представляет собой математическое выражение так называемого закона сохранения энергии. Именно, выражение

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} v^2$$

называется кинетической энергией, или энергией движения движущейся материальной точки, а величина U называется потенциальной энергией, или энергией положения этой точки. Не вводя здесь в рассмотрение физического значения этих понятий, мы лишь устанавливаем, что наше уравнение выражает следующий закон: при движении в консервативном поле сил полная энергия материальной точки, т. е. сумма потенциальной и кинетической энергий, остается неизменной.

В следующем параграфе мы увидим на отдельных примерах, как можно использовать этот закон сохранения энергии для действительного решения проблемы уравнений движения.

3. Равновесие. Наши уравнения движения, для которых мы попрежнему будем предполагать, что $\mathbf{k} = -\text{grad } U$ представляет собой консервативное поле сил, дают нам также возможность подробнее исследовать проблему равновесия. Мы говорим, что материальная точка находится в равновесии

под влиянием данного поля сил, если эта точка остается в состоянии покоя. Для того чтобы это имело место, необходимо, чтобы как скорость, так и ускорение точки оставались равными нулю в течение всего рассматриваемого промежутка времени; уравнения движения дают нам тогда в качестве необходимых условий равновесия уравнение

$$\text{grad } U = 0$$

или

$$U_x = 0, U_y = 0, U_z = 0.$$

Этими уравнениями определяются те точки, в которых потенциальная энергия U имеет стационарное значение. При этом особенный интерес представляет тот факт, что точке, в которой потенциальная энергия U достигает минимума, соответствует положение устойчивого равновесия. Под устойчивостью равновесия мы понимаем при этом следующее: если достаточно мало нарушить в начальный момент состояние равновесия, то в течение всего следующего за этим движения отклонение движущейся точки от положения покоя будет оставаться сколь угодно малым ¹⁾. Точнее: если отклонить материальную точку от ее положения равновесия на величину, меньшую некоторого достаточно малого числа δ , и сообщить точке начальную скорость, не превосходящую некоторой верхней грани ϵ , то при достаточно малых значениях δ и ϵ расстояние движущейся точки от положения равновесия будет в течение всего движения меньше любого наперед заданного числа R , а скорость движущейся точки не превзойдет наперед заданной верхней грани ρ .

Любопытно, что мы можем доказать эту теорему об устойчивости равновесия без того, чтобы полностью проинтегрировать уравнения движения. Нам достаточно при доказательстве опираться на то, что в соответствующем положении равновесия потенциальная энергия U достигает минимума. Простоты ради мы предположим, что положение равновесия, т. е. точка минимума функции U находится в начале координат — в противном случае мы можем параллельным перемещением системы координат совместить эту точку с началом координат. Так как согласно своему определению потенциальная энергия U определена только с точностью до произвольной аддитивной постоянной (функция U и функция $U + \text{const}$ определяют одно и то же поле сил, ибо при дифференцировании постоянная исчезает), то мы можем, не ограничивая общности, принять, что минимальное значение $U(0, 0, 0) = 0$.

Опишем вокруг начала координат шар радиуса r и, принимая во внимание наше условие минимума, выберем $r < R$ настолько малым, чтобы внутри и на поверхности этого шара K , всюду, кроме начала координат, U было положительным. Обозначим через a минимальное значение U на поверхности шара; по условию a положительно. Отсюда следует, что мате-

¹⁾ Примером такого устойчивого равновесия может служить материальная точка, находящаяся под действием силы тяжести и лежащая неподвижно в самой нижней точке сферического сосуда, обращенного своей вогнутостью вверх. Наоборот, материальная точка, находящаяся в состоянии покоя в самой высшей точке сферического сосуда, обращенного своей вогнутостью вниз, находится в состоянии „неустойчивого“ равновесия. Самое незначительное нарушение равновесия вызывает большие изменения в положении точки.

риальная точка никогда не сможет достигнуть поверхности шара K_r , если потенциальная энергия точки все время остается меньше a . Выберем начальное положение точки в момент $t=0$ внутри сферы K_r так, чтобы для начального значения потенциальной энергии U_0 имело место неравенство:

$$U_0 < \frac{a}{2},$$

и сообщим точке такую начальную скорость v_0 , чтобы для начального значения кинетической энергии также имело место неравенство:

$$T_0 = \frac{m}{2} v_0^2 < \frac{a}{2};$$

тогда во время всего движения будет иметь место, в силу закона сохранения энергии, неравенство:

$$T + U = T_0 + U_0 < a.$$

Так как $T \geq 0$, то всегда $U < a$, и движущаяся точка не может поэтому никогда удалиться от начала на расстояние, большее числа r . Так как при этом постоянно $U \geq 0$, то и $T < a$ в течение всего движения, и для скорости v постоянно имеет место неравенство:

$$v < \sqrt{\frac{2a}{m}}.$$

В силу непрерывности U при достаточно малом r число a и вместе с тем и v также становятся сколь угодно малы; мы видим таким образом, что, выбирая начальное отклонение от положения равновесия достаточно малым, мы сможем достигнуть того, чтобы и во время всего движения отклонение от положения равновесия оставалось сколь угодно малым.

§ 2. Примеры из механики материальной точки.

1. Падение под углом к горизонту. В качестве простейшего примера рассмотрим движение материальной точки под влиянием силы тяжести, действующей по направлению отрицательной оси z . Уравнения Ньютона принимают тогда следующий вид:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg,$$

следовательно

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Из каждого из этих уравнений мы можем путем интегрирования определить сначала соответствующую компоненту скорости, а затем самую координату точки. Именно, мы получаем непосредственно:

$$\frac{dx}{dt} = a_1, \quad \frac{dy}{dt} = b_1, \quad \frac{dz}{dt} = -gt + c_1,$$

где a_1 , b_1 , c_1 — постоянные; вторичным интегрированием получаются уравнения:

$$x = a_1 t + a_2, \quad y = b_1 t + b_2, \quad z = -\frac{g}{2} t^2 + c_1 t + c_2,$$

где a_2 , b_2 , c_2 означают дальнейшие три постоянные. Значения наших шести постоянных интегрирования получаются из начальных условий движения. Мы можем, не ограничивая общности механической проблемы, выбрать систему координат так, чтобы в момент $t=0$ материальная точка находилась в начале координат; полагая в последних уравнениях $t=0$ и $x=y=z=0$, мы получаем: $a_2=b_2=c_2=0$; мы можем далее предположить, не ограничивая общности задачи, что начальная скорость лежит в плоскости x, z , так что компонент b_1 начальной скорости равна нулю.

При этих предположениях будет иметь место уравнение $y(t)=0$ при всех значениях t . Траектория точки лежит таким образом в одной плоскости, а именно в плоскости x, z . Исключая время t из остальных двух уравнений:

$$x = a_1 t, \quad z = -\frac{g}{2} t^2 + c_1 t,$$

мы получаем уравнение траектории в форме:

$$z = -\frac{g}{2a_1^2} x^2 + \frac{c_1}{a_1} x.$$

Эта кривая представляет собой параболу, ось которой параллельна оси z и которая обращена своей вогнутостью вниз. Координаты вершины получаются как координаты точки максимума функции z путем приравнивания нулю производной правой части предыдущего уравнения. Мы получаем таким путем для координат x, z вершины параболы значения:

$$x = \frac{a_1 c_1}{g}$$

$$z = -\frac{g}{2a_1^2} \cdot \frac{a_1^2 c_1^2}{g^2} + \frac{c_1}{a_1} \cdot \frac{a_1 c_1}{g} = \frac{c_1^2}{2g}.$$

Время T , в течение которого точка достигает вершины, определяется из уравнения:

$$T = \frac{x}{a_1} = \frac{c_1}{g}.$$

Через двойной промежуток времени $t = \frac{2c_1}{g}$ падающая точка имеет координаты $x = \frac{2a_1 c_1}{g}$, $z=0$ и достигает таким образом снова горизонтали начальной точки $x=0, z=0$. Вопрос о том, под каким углом к горизонту следует бросить материальную точку с заданной начальной скоростью

$$v = \sqrt{a_1^2 + c_1^2},$$

для того чтобы получить возможно большую дальность полета $\frac{2a_1 c_1}{g}$ (мы предполагаем при этом, что $a_1 \geq 0$, $c_1 \geq 0$), равносильна задаче нахождения максимума функции $f = a_1 c_1$ при дополнительном условии

$$a_1^2 + c_1^2 = \text{const.}$$

Применяя правило множителей Лагранжа (гл. III, § 6), мы получаем для определения величин a_1 и c_1 систему уравнений:

$$a_1 + 2\lambda c_1 = 0; \quad c_1 + 2\lambda a_1 = 0; \quad a_1^2 + c_1^2 = \text{const.},$$

из которых непосредственно следует, что $a_1 = c_1$ ¹⁾. Таким образом наивыгоднейшим углом бросания (существование такого угла очевидно само собой, см. примеры гл. III, § 6) является угол в 45° .

2. Небольшие колебания около положения равновесия. Мы исследовали в § 1, п^о 3 устойчивость положения равновесия. Движение материальной точки вокруг положения устойчивого равновесия, соответствующего минимуму потенциальной энергии, может быть приближенно представлено в следующем простом виде. Краткости ради ограничимся случаем движения в плоскости x, y , предполагая, что по направлению оси z не действуют никакие силы. Представим потенциальную энергию U в окрестности начала координат, в котором U достигает своего минимума, по формуле Тэйлора в виде

$$U = U_0 + px + qy + \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) + \dots$$

Через p, q, a, b, c мы обозначаем при этом значения первых и вторых производных $U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}$ функции U в начале координат. Так как, по предположению,

$$U_0 = 0, \quad U_x(0,0) = 0, \quad U_y(0,0) = 0,$$

то постоянный и линейные члены разложения U равны нулю. Мы предполагаем далее, что в соответствии с тем, что начало координат является точкой минимума, квадратичные члены образуют определенную положительную квадратичную форму

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

и что в достаточной близости от положения равновесия потенциальная энергия U может быть выражена с достаточной степенью точности с помощью этой квадратичной формы Q . При этих предположениях уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\text{grad } Q, \\ \text{или} \quad m\ddot{x} &= -ax - by, \\ m\ddot{y} &= -bx - cy. \end{aligned}$$

¹⁾ Совершенно элементарным путем тот же результат непосредственно следует из того, что всегда имеет место соотношение $|a_1 c_1| \leq \frac{a_1^2 + c_1^2}{2}$, причем равенство имеет место в том случае, когда $|a_1| = |c_1|$.

Эти уравнения могут быть легко проинтегрированы, если мы предварительно повернем систему координат x, y на соответствующий угол. В самом деле, из аналитической геометрии известно, что с помощью поворота системы координат на некоторый угол φ , т. е. с помощью преобразования

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi,\end{aligned}$$

определенная положительная форма

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2Q$$

может быть преобразована в форму

$$a\xi^2 + \beta\eta^2 = 2Q,$$

где ξ и η означают новые прямоугольные координаты, a и β суть положительные числа. В этой новой системе координат мы получаем из уравнения $m\ddot{x} = -\text{grad } Q$ следующие уравнения движения для новых компонент ξ и η радиуса-вектора x :

$$\begin{aligned}m\ddot{\xi} &= -a\xi, \\m\ddot{\eta} &= -\beta\eta.\end{aligned}$$

Но каждое из этих уравнений мы можем полностью проинтегрировать, как мы это уже проделали в первом томе (гл. V, § 4). Мы получаем

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 \sin \sqrt{\frac{a}{m}} (t - c_1), \\ \eta &= A_2 \sin \sqrt{\frac{\beta}{m}} (t - c_2),\end{aligned}$$

где c_1, c_2, A_1, A_2 суть постоянные интегрирования, дающие возможность определить процесс движения для любых произвольно заданных начальных условий.

Форма наших решений показывает, что процесс движения вокруг устойчивого положения равновесия получается путем сложения двух чистых колебаний, происходящих по обоим „главным направлениям колебания“: направлению ξ и направлению η , причем частоты этих колебаний задаются числами

$$\sqrt{\frac{a}{m}} \text{ и } \sqrt{\frac{\beta}{m}}.$$

При исследовании этих колебательных движений, на котором мы здесь не можем остановиться подробнее, обнаруживается, что равнодействующее колебание может иметь самый разнообразный характер.

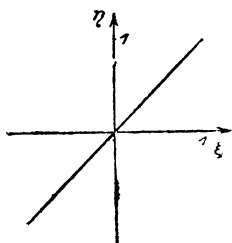
Приведем только несколько примеров таких сложных колебаний. Рассмотрим сначала движение, выражаемое уравнениями:

$$\xi = \sin(t + c), \quad \eta = \sin(t - c).$$

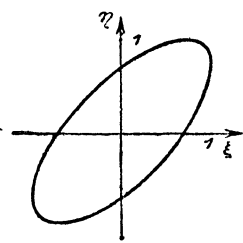
Исключая время t , мы получаем:

$$(\xi + \eta)^2 \sin^2 c + (\xi - \eta)^2 \cos^2 c = 4 \sin^2 c \cos^2 c,$$

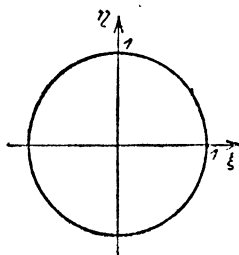
т. е. уравнение эллипса. Оба составляющих колебания имеют одинаковые частоту и амплитуду, равные единице, но сдвиг фаз между обоими колебаниями равен $2c$. Когда этот сдвиг фаз пробегает все значения от нуля до $\frac{\pi}{4}$, эллиптическая траектория колебания, вырождающаяся при $c=0$ в



Черт. 83.



Черт. 84.



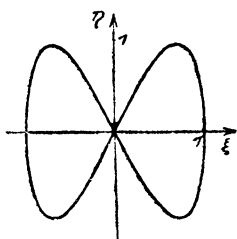
Черт. 85.

прямолинейный отрезок $\xi - \eta = 0$, непрерывно деформируется и переходит при $c = \frac{\pi}{4}$ в круг $\xi^2 + \eta^2 = 1$, а само колебательное движение переходит от так называемого линейного колебания в круговое колебание (черт. 83—85).

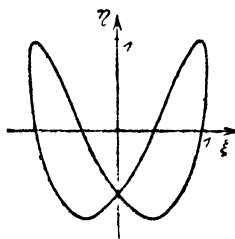
В качестве второго примера рассмотрим движение, определяемое уравнениями:

$$\xi = \sin t, \quad \eta = \sin 2(t - c),$$

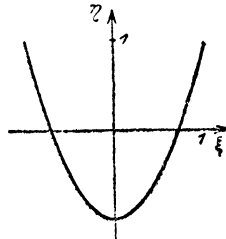
для которого частоты составляющих колебаний уже не равны между собой. В этом случае получаются значительно более сложные фигуры колебания.



Черт. 86.



Черт. 87.



Черт. 88.

На приводимых здесь чертежах (черт. 86—88) изображены фигуры, получающиеся при сдвигах фаз:

$$c = 0, \quad c = \frac{\pi}{8} \quad \text{и} \quad c = \frac{\pi}{4}.$$

В первых двух случаях материальная точка движется по замкнутой кривой, описывая ее в одном и том же направлении, тогда как в третьем случае точка движется туда и обратно вдоль дуги параболы $\eta = 2\xi^2 - 1$.

Все подобные кривые, получающиеся путем сложения двух различных чисто периодических колебаний, происходящих по двум различным направлениям, называются фигурами Лиссажу.

3. Движение планет. Во всех предыдущих примерах можно было непосредственно или после простого преобразования представить уравнения движения в таком виде, чтобы каждая из рассматриваемых координат в отдельности удовлетворяла особому дифференциальному уравнению и могла бы быть определена путем элементарного интегрирования. Приведем теперь важнейший пример такого движения, при котором система уравнений движения уже не распадается на отдельные уравнения с помощью таких элементарных приемов и требует для своего интегрирования немного более сложных вычислений. Речь идет о выводе законов Кеплера для движения планет из ньютонова закона всемирного тяготения. Пусть в начале системы координат находится масса μ (например солнце), притягивающая по закону Ньютона, так что сила, с которой масса μ действует на единицу массы, задается вектором:

$$\mathbf{x} = \mu \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

Каково движение материальной точки (планеты) под влиянием этого поля сил? Уравнение движения $m\ddot{\mathbf{x}} = \mu m \operatorname{grad} \frac{1}{r}$, выраженное в координатах, гласит так:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}; \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}; \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}.$$

Чтобы интегрировать эту систему, напомним сначала для искомого движения закон сохранения энергии в форме:

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu m}{r} = C,$$

где C есть число, остающееся при движении постоянным и зависящее исключительно от начальных условий движения. Мы можем теперь из наших уравнений движения получить еще другие уравнения, в которые входят уже не компоненты ускорения, а только компоненты скоростей рассматриваемого движения. Для этой цели умножим первое из уравнений движения на y , второе на x и вычтем их друг из друга. Мы получаем:

$$\ddot{x}y - x\ddot{y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} (\dot{x}y - y\dot{x}) = 0,$$

откуда интегрированием получаем:

$$\dot{x}y - y\dot{x} = c_1.$$

Таким же образом мы получаем из остальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{y}z - z\dot{y} &= c_2, \\ \dot{z}x - x\dot{z} &= c_3. \end{aligned}$$

1) Полученные нами таким путем три уравнения можно вывести также, пользуясь векторной формой записи, умножая векторно уравнение движения на радиус-

Полученные нами уравнения разрешают нам произвести в нашей проблеме одно существенное упрощение, которого можно было ожидать с самого начала. Именно, выбрав систему координат так, чтобы в начальный момент движения точка находилась в плоскости x, y и чтобы вектор скорости этой точки в начальный момент также лежал в этой плоскости, чем мы, разумеется, нисколько не ограничиваем общности задачи, мы получим что $z(0)=0$ и $\dot{z}(0)=0$. Вставляя в предыдущие уравнения значения $z(0)=0$ и $\dot{z}(0)=0$, мы получим, так как правые части не зависят от времени, что:

$$\begin{aligned}x\ddot{y} - y\ddot{x} &= c_1 = h, \\y\ddot{z} - z\ddot{y} &= 0, \\z\ddot{x} - x\ddot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Из этих уравнений мы делаем, во-первых, тот вывод, что движение постоянно происходит в плоскости $z=0$. В самом деле, так как мы естественно исключаем случай столкновения солнца с планетой, то мы можем предположить, что три координаты x, y и z никогда не обращаются в нуль все одновременно. Так как при $t=0$ координата $z(0)=0$, то пусть при этом $x(0) \neq 0$.

Тогда из последнего из предыдущих уравнений следует:

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = \frac{x\dot{z} - z\dot{x}}{x^2} = 0.$$

Отсюда: $z = ax$, где a — постоянная. Полагая $t=0$, мы получаем, так как $z(0)=0$, а $x(0) \neq 0$, что $a=0$, и следовательно всегда $z=0$.

Мы можем теперь нашу задачу интегрирования дифференциальных уравнений свести к решению системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\chi\mu m}{r} &= C, \\x\dot{y} - y\dot{x} &= h.\end{aligned}$$

вектор \dot{x} . Тогда справа получаем нуль, так как вектор силы совпадает по направлению с радиусом-вектором, а стоящее слева выражение $x \times \dot{x}$ представляет собой как раз производную по времени вектора $x \times \dot{x}$. Отсюда следует, что этот вектор $x \times \dot{x}$ имеет постоянное значение c , не зависящее от времени, и именно этот факт выражают в координатах полученные нами выше уравнения.

Как мы отсюда можем усмотреть, наше уравнение не является исключительной особенностью данной специальной проблемы, но остается в силе для всякого движения, для которого сила совпадает по направлению с радиусом-вектором. Вектор $x \times \dot{x}$ называется моментом скорости, а вектор $m(x \times \dot{x})$ называется моментом количества движения. Из геометрического значения векторного произведения можно легко получить следующее наглядное и толкование нашего соотношения (см. дальнейший ход рассуждений в тексте). Проектируя движущуюся материальную точку на плоскости координат и рассматривая в каждой из плоскостей координат площадь, описываемую в течение времени t радиусом-вектором, соединяющим проекцию движущейся точки с началом координат, мы получаем, что эта площадь изменяется пропорционально времени или что секториальная скорость постоянна (закон площади).

Введем в эти уравнения вместо прямоугольных координат x и y полярные координаты r и φ , полагая

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Так как

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2 \dot{\varphi},$$

то мы получаем для r и φ , рассматриваемых как функции времени t , следующие два дифференциальных уравнения:

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\chi \mu m}{r} = C,$$

$$r^2 \dot{\varphi} = h.$$

Первое из этих уравнений выражает закон сохранения энергии; второе выражает кеплеров закон площадей. В самом деле, выражение $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ представляет собой производную по времени t от секториальной площади, описываемой радиусом-вектором, соединяющим начало координат с движущейся материальной точкой. Эта секториальная скорость оказывается таким образом постоянной, т. е., как гласит первый закон Кеплера, радиус-вектор описывает в равные промежутки времени равные площади. Если „постоянная площадей“ h равна нулю, то производная $\dot{\varphi}$ должна обращаться в нуль, т. е. угол φ должен оставаться постоянным, и движение должно происходить по прямой, проходящей через начало координат. Мы исключаем этот особый случай и предполагаем, что $h \neq 0$.

Определим сначала геометрический вид траектории движения, оставляя пока в стороне вопрос о том, как это движение протекает во времени. Для этой цели будем рассматривать угол φ как функцию от r или r как функцию φ и вычислим из наших двух уравнений производную $\frac{dr}{d\varphi}$ в качестве функции от r .

Подставляя в уравнение, выражающее закон сохранения энергии, получающееся из закона площадей значение $\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$ и принимая во внимание равенство:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi},$$

мы получаем в качестве дифференциального уравнения траектории соотношение:

$$\frac{m}{2} \left[\frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \right] - \frac{\chi \mu m}{r} = C,$$

откуда

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = r^4 \left(\frac{2C}{mh^2} + \frac{2\chi\mu}{h^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Для упрощения дальнейших вычислений совершим подстановку

$$r = \frac{1}{w}$$

и введем следующие сокращенные обозначения:

$$\frac{1}{p} = \frac{\chi\mu}{h^2}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\chi\mu^2}.$$

Мы получаем тогда:

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(w - \frac{1}{p}\right)^2.$$

Это уравнение мы можем сразу интегрировать; именно, имеем:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{dw}{V \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(w - \frac{1}{p}\right)^2},$$

или, введя временно новую переменную $v = w - \frac{1}{p}$, получаем:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{dv}{V \frac{\varepsilon^2}{p^2} - v^2}.$$

Этот интеграл равен $\arcsin \frac{vp}{\varepsilon}$ (т. I, гл. IV, § 2), и мы получаем таким образом уравнение траектории в форме:

$$v = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{\varepsilon}{p} \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Углу φ_0 мы можем придать какое угодно значение, так как является совершенно безразличным, с какого места мы отсчитываем угол φ . Мы принимаем $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, т. е. предполагаем, что значению $v = 0$ соответствует значение $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Мы получаем тогда уравнение траектории в окончательном виде:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Мы считаем известным из аналитической геометрии, что это уравнение является уравнением в полярных координатах конического сечения, один из фокусов которого находится в начале координат.

Полученный нами результат выражает таким образом второй закон Кеплера, согласно которому планеты движутся по коническим сечениям, один из фокусов которых находится на солнце.

Представляет интерес установить связь между постоянными интегрирования

$$p = \frac{h^2}{\chi \mu}, \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\chi^2\mu^2}$$

и начальными условиями движения. Величину p называют параметром конического сечения; для эллипса и гиперболы p связано с полуосями a и b простым соотношением:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Величина эксцентриситета ϵ^2 определяет вид конического сечения, а именно, мы имеем эллипс, параболу или гиперболу в зависимости от того, будет ли ϵ^2 меньше, равно или больше единицы.

Из соотношения

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\chi^2\mu^2}$$

следует, что эти три случая могут быть также характеризованы с помощью постоянной энергии C , а именно, орбита планеты будет эллипсом, параболой или гиперболой в зависимости от того, будет ли постоянная C меньше, равна или больше нуля.

Представим себе, что наша материальная точка в момент $t=0$ введена в поле сил и помещена в точке x_0 , получив при этом начальную скорость v_0 . Тогда из соотношения

$$C = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{\chi \mu m}{r^2}$$

следует тот замечательный факт, что форма орбиты, т. е. является ли она эллипсом, параболой или гиперболой, совершенно не зависит от направления начальной скорости, а зависит исключительно от ее абсолютной величины v_0 .

Третий закон Кеплера является простым следствием из первых двух законов. Этот закон, как известно, устанавливает, что у эллиптических орбит отношение квадрата времени обращения к кубу большой полуоси является постоянной величиной, одинаковой для всех планет, и зависит исключительно от поля сил, т. е. если обозначить через T время обращения, а через a — большую полуось, то должно иметь место соотношение:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

и эта постоянная C не зависит от рассматриваемой планеты, а зависит исключительно от притягивающей массы и постоянной тяготения χ .

Для доказательства воспользуемся законом площадей, характеризующим рассматриваемое движение как процесс, протекающий во времени. Запишем этот закон в проинтегрированном виде:

$$\int_{t_0}^t r^2 d\varphi = h(t - t_0).$$

Взяв этот интеграл в пределах 0 до 2π , мы получим слева двойную площадь эллиптической орбиты, равную согласно нашим предыдущим результатам $2\pi ab$, тогда как справа мы должны заменить разность $t - t_0$ временем обращения T . Таким образом

$$2\pi ab = hT \text{ или } 4\pi^2 a^2 b^2 = h^2 T^2.$$

Но мы знаем, что между h и элементами орбиты a и b существует зависимость

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{\gamma \mu}.$$

Заменяя в уравнении

$$4\pi^2 a^2 b^2 = h^2 T^2$$

величину h^2 ее значением

$$h^2 = \frac{b^2}{a} \gamma \mu$$

мы получаем соотношение:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma \mu},$$

выражающее третий закон Кеплера.

§ 3. Дальнейшие примеры интегрирования дифференциальных уравнений.

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых общих положений из теории дифференциальных уравнений, которые мы изложим в следующем параграфе, мы разберем здесь еще несколько примеров дифференциальных уравнений, взятых также отчасти из механики.

1. **Общее линейное дифференциальное уравнение первого порядка.** Мы уже в свое время в первом томе (гл. III, § 6) полностью проинтегрировали дифференциальное уравнение $y' + ay + b = 0$ для случая постоянных коэффициентов a и b . Но это „линейное дифференциальное уравнение первого порядка“¹⁾

$$y' + ay + b = 0$$

с неизвестной функцией $y(x)$ может быть полностью проинтегрировано также и в том случае, когда a и b являются произвольными непрерывными функциями от x . При этом удается решить это дифференциальное уравнение с помощью показательной функции и обыкновенных интегралов (которые впрочем могут быть в общем случае и невыполнимы с помощью элементарных функций).

Рассмотрим сперва случай, когда $b = 0$; тогда мы можем записать данное дифференциальное уравнение (пока $y \neq 0$) в виде:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \log |y| = -a.$$

1) Слово „линейное“ означает, что неизвестная функция и ее производные входят в дифференциальное уравнение только в первой степени; дифференциальным же уравнением первого порядка называется всякое дифференциальное уравнение, содержащее только производную первого порядка и не содержащее производных высших порядков.

Отсюда мы получаем:

$$\lg |y| = - \int a(x) dx,$$

и наконец, обозначая какой-нибудь неопределенный интеграл функции $a(x)$ через $A(x)$, мы получаем:

$$y = ce^{-A(x)},$$

где c есть произвольная постоянная, появляющаяся при интегрировании.

Эта формула дает и при $c=0$ решение данного дифференциального уравнения, а именно $y=0$. Пусть теперь $b(x)$ не равно нулю. Мы попытаемся и в этом случае получить решение дифференциального уравнения в такой же форме, только с той разницей, что множитель c уже не будет постоянным, т. е. мы записываем решение данного дифференциального уравнения в форме

$$y = u(x)e^{-A(x)}.$$

Так как

$$A'(x) = a(x),$$

то

$$y' = u'(x)e^{-A(x)} - u(x)a(x)e^{-A(x)},$$

и мы непосредственно получаем для неизвестной функции $u(x)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$u'(x)e^{-A(x)} = -b,$$

откуда

$$u(x) = - \int b(x)e^{A(x)} dx.$$

Таким образом мы получаем в качестве решения нашего дифференциального уравнения следующее выражение:

$$y(x) = -e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx,$$

где

$$A(x) = \int a(x) dx.$$

Это выражение получается из известных нам функций $a(x)$ и $b(x)$ исключительно посредством процессов обыкновенного интегрирования и с помощью показательной функции. Так как функция $u(x)$ определена только с точностью до произвольной аддитивной постоянной, то мы можем наше решение представить в виде:

$$e^{-A(x)} \left(c - \int_0^x b(\xi) e^{A(\xi)} d\xi \right),$$

где

$$A(x) = \int a(\lambda) d\lambda,$$

так что наше решение содержит произвольную постоянную интегрирования c .

Например для дифференциального уравнения

$$y' + xy + x = 0$$

мы получим:

$$A(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}, \quad \int e^{A(x)} b(x) dx = \int e^{\frac{x^2}{2}} x dx = e^{\frac{x^2}{2}},$$

так что

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} (c - e^{\frac{x^2}{2}}) = ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

является решением этого дифференциального уравнения, что мы можем легко проверить дифференцированием.

2. Простейший случай вынужденного колебания системы. Мы уже в первом томе (гл. X) проинтегрировали дифференциальные уравнения простейших вынужденных колебаний. Ограничимся тем случаем, когда трение равно нулю, и простоты ради положим массу $m = 1$ (или разделим дифференциальное уравнение на m). Мы можем тогда записать общее дифференциальное уравнение вынужденного колебания в форме:

$$\ddot{x}(t) + x^2 x(t) = \varphi(t),$$

где через x^2 мы теперь обозначаем ту величину, которую мы в свое время обозначали через k , а через $x(t)$ мы обозначаем отклонение от положения равновесия, которое требуется выразить как функцию времени. Тогда как раньше мы проинтегрировали это дифференциальное уравнение только для случая чисто периодической правой части $\varphi(t)$, мы можем теперь дать общее решение этого уравнения в виде интеграла. Этот интеграл принадлежит к типу, с которым мы уже ознакомились в гл. IV стр. 175. Прежде чем написать наше решение, рассмотрим предварительно интеграл вида:

$$F(t) = \int_0^t f(\lambda) \dot{g}(t - \lambda) d\lambda$$

[на стр. 175 вместо функции $\dot{g}(t - \lambda)$ стоит специальная функция $(t - \lambda)^n$].

Этот интеграл является функцией параметра t . Дифференцируя его по параметру t согласно правилам главы IV, § 1, мы получим:

$$\dot{F}(t) = f(t)g(0) + \int_0^t f(\lambda) \dot{g}(t - \lambda) d\lambda,$$

а вторичное дифференцирование дает:

$$\ddot{F}(t) = \dot{f}(t)g(0) + f(t)\dot{g}(0) + \int_0^t f(\lambda) \ddot{g}(t - \lambda) d\lambda.$$

Если в частности функция $g(t)$ обладает тем свойством, что

$$g(0) = 0 \text{ и } \dot{g}(0) = 1,$$

то

$$\ddot{F}(t) = f(t) + \int_0^t f(\lambda) \ddot{g}(t - \lambda) d\lambda.$$

Мы применяем теперь эту формулу для случая:

$$f(t) = \varphi(t) \text{ и } g(x) = \frac{1}{\chi} \sin \chi x.$$

Мы получаем непосредственно:

$$\ddot{F}(t) = \varphi(t) - \chi \int_0^t \varphi(\lambda) \sin \chi(t - \lambda) d\lambda,$$

откуда следует, что функция

$$F(t) = \frac{1}{\chi} \int_0^t \varphi(\lambda) \sin \chi(t - \lambda) d\lambda$$

является решением нашего дифференциального уравнения $\ddot{x} + \chi^2 x = \varphi(t)$, причем это решение удовлетворяет начальным условиям:

$$F(0) = 0, \quad \dot{F}(0) = 0,$$

что непосредственно получается из написанных выше уравнений, если верхний предел t положить равным нижнему пределу 0. В качестве общего решения нашего дифференциального уравнения мы получим точно так же, как и раньше, функцию:

$$x(t) = \frac{1}{\chi} \int_0^t \varphi(\lambda) \sin \chi(t - \lambda) d\lambda + c_1 \sin \chi t + c_2 \cos \chi t$$

с произвольными постоянными c_1 и c_2 .

Если в частности правая часть нашего дифференциального уравнения является чисто периодической функцией вида $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$, то мы получим путем очень простого вычисления результаты тома I главы X.

3. Негармонические колебательные системы. Комбинированные тоны. Так называемые негармонические колебания приводят к дифференциальному уравнению, играющему большую роль в очень многих технических и физических вопросах. В то время как у простейших гармонических колебаний упругая сила, стремящаяся вернуть материальную точку в ее положение равновесия и направленная к этому последнему, пропорциональна расстоянию точки от положения равновесия (мы здесь не принимаем во внимание трения), так что по обе стороны от положения равновесия движение происходит в совершенно симметрических условиях, имеются такие колебательные системы, для которых при одном и том же расстоянии от положения равновесия упругая сила по одну сторону от него больше, чем по другую сторону. Такой „нелинейный“ характер присущ, строго говоря, большинству колебательных систем; он становится особенно заметным, когда амплитуды колебаний превосходят известную границу. В простейшем случае такое нелинейное свободное колебание определяется дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \chi^2 x + \sigma x^2 = 0,$$

причем $x(t)$ снова означает отклонение материальной точки, совершающей колебания по оси x вокруг положения равновесия $x=0$. Постоянный множитель σ при x^2 дает нам меру асимметрии поля сил относительно положения равновесия.

Мы непосредственно получаем точное решение этого дифференциального уравнения свободного несимметрического колебания, применяя изложенный уже в первом томе (гл. V, § 4, п° 4) общий способ решения дифференциального уравнения вида $\ddot{x}=f(x)$. Умножая на \dot{x} и интегрируя, мы получаем следующее уравнение (закон сохранения энергии):

$$\dot{x}^2 + x^2 x^2 + \frac{2}{3} \sigma x^3 = C,$$

где C — постоянная. Пусть при $t=0$ начальное отклонение $x=a$, а скорость $\dot{x}=0$; тогда C определяется из уравнения:

$$x^2 a^2 + \frac{2}{3} \sigma a^3 = C,$$

и мы получаем:

$$\dot{x}^2 = x^2(a^2 - x^2) + \frac{2}{3} \sigma(a^3 - x^3).$$

Решение нашего дифференциального уравнения дается тогда интегралом

$$t = \int_a^x \frac{d\xi}{\sqrt{x^2(a^2 - \xi^2) + \frac{2}{3} \sigma(a^3 - \xi^3)}},$$

выражающим t в виде функции от x . Обратная функция $x(t)$ от этой функции $t(x)$ изображает искомое движение.

Согласно введенному нами раньше (т. I, стр. 210) обозначению этот интеграл является эллиптическим интегралом. Обратная функция, с помощью которой решается наша задача, есть так называемая эллиптическая функция, подробное изучение которой относится к области теории функций. Здесь мы можем установить периодический характер этой функции, во всяком случае для достаточно малых значений постоянной σ . В самом деле, пусть постоянная σ настолько мала, что функция x кроме значения $x=a$ обращается в нуль еще при значении $x=-a'$, близком к значению $x=-a$. С помощью такого же исследования, какое мы провели в первом томе (стр. 256 и след.), мы убеждаемся, что материальная точка должна в продолжение всего движения совершать качания между точками $x=a$ и $x=-a'$, и эти качания должны при этом повторяться периодически. Этот период колебания зависит впрочем существенным образом от начального отклонения a в отличие от гармонических колебаний. Величина этого периода (см. соответствующие рассуждения в первом томе, стр. 256 и след.) дается выражением:

$$T = 2 \int_{-a'}^a \frac{dx}{\sqrt{x^2(a^2 - x^2) + \frac{2}{3} \sigma(a^3 - x^3)}}$$

Попытаемся теперь заменить приведенное выше точное решение дифференциального уравнения с помощью эллиптического интеграла более удобным приближенным решением, воспользовавшись для этой цели предположенной малостью величины σ . Для этой цели запишем искомое решение $x(t)$ нашего дифференциального уравнения в форме:

$$x(t) = x_0(t) + \sigma x_1(t) + \sigma^2 x_2(t) + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \sigma^v x_v(t),$$

т. е. в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням σ , и постараемся определить коэффициенты $x_v(t)$ этого ряда таким образом, чтобы сумма ряда $x(t)$ удовлетворяла данному дифференциальному уравнению. На первый взгляд наша задача при этом сильно усложняется, так как вместо одной функции $x(t)$ мы должны теперь определить бесконечное множество функций $x_v(t)$. Однако это усложнение является лишь кажущимся, так как очень легко формальным путем последовательно определить эти функции $x_v(t)$ одну за другой.

В самом деле, образовав путем формального дифференцирования производные нашей функции $x(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sigma^v \dot{x}_v(t), \\ \ddot{x}(t) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sigma^v \ddot{x}_v(t) \end{aligned}$$

и подставив формально эти выражения в дифференциальное уравнение, мы приведем наше уравнение к следующему виду:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sigma^v [\ddot{x}_v + \lambda^2 x_v - \phi_v(t)] = 0,$$

где мы краткости ради полагаем:

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= 0, \\ \phi_1(t) &= -x_0^2, \\ \phi_2(t) &= -2x_0 x_1, \\ \phi_3(t) &= -2x_0 x_2 - x_1^2, \\ &\dots \dots \dots \\ \phi_v(t) &= -\sum_{p=0}^{v-1} x_p x_{v-1-p}. \end{aligned}$$

Мы не можем здесь остановиться на вопросе о законности такой постановки и сходимости полученного ряда и должны ограничиться формальным исследованием, предполагая доказанной законность всех этих формальных операций.

Попытаемся удовлетворить нашему дифференциальному уравнению, приравнявая нулю все коэффициенты при различных степенях σ . Мы тогда

получаем для определения коэффициентов $x_i(t)$ систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \chi^2 x_0 &= \phi_0(t) = 0, \\ \ddot{x}_1 + \chi^2 x_1 &= \phi_1(t), \\ &\vdots \\ \ddot{x}_i + \chi^2 x_i &= \phi_i(t).\end{aligned}$$

Эта система обладает тем характерным свойством, что правая часть каждого из этих дифференциальных уравнений становится известной нам функцией от t , как только мы находим предшествующие функции $x_i(t)$. Каждое из этих дифференциальных уравнений имеет простую форму дифференциального уравнения вынужденного гармонического колебания и может быть непосредственно проинтегрировано. Если мы ищем например то решение, для которого $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$, то мы должны для x_0 взять выражение:

$$x_0 = a \cos \chi t.$$

Тогда для \ddot{x}_1 мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}_1 + \chi^2 x_1 = -a^2 \cos^2 \chi t,$$

так что согласно приведенной в п^о 2 формуле

$$x_1 = -\frac{a^2}{\chi} \int_0^t \cos^2 \chi \lambda \sin \chi(t - \lambda) d\lambda.$$

Стоящий справа интеграл мы можем очень легко вычислить с помощью элементарных методов первого тома (гл. IV), пользуясь соотношением:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Мы получаем тогда путем простого вычисления:

$$x_1 = -\frac{a^2}{2\chi^2} \left(1 - \frac{2}{3} \cos \chi t - \frac{1}{3} \cos 2\chi t \right).$$

Таким же путем мы получим другие приближенные решения дифференциального уравнения, взяв для x_0 выражение вида:

$$b \sin \chi t$$

или более общего вида:

$$a \cos \chi t + b \sin \chi t.$$

Характерным для найденного решения является то, что оно содержит в себе кроме основной частоты χ свободного колебания еще одно высшее гармоническое колебание.

Совершенно аналогичным образом может быть проинтегрировано дифференциальное уравнение несимметрического вынужденного колебания:

$$\ddot{x} + \chi^2 x + \sigma x^2 = \varphi(t).$$

Полагая

$$x = \sum_{v=0}^{\infty} \sigma^v x_v(t),$$

мы получим для определения коэффициентов последовательность дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_v + x^2 x_v = \phi_v(t),$$

причем теперь в отличие от предыдущего $\phi_0(t)$ уже не равно нулю, но

$$\phi_0(t) = \varphi(t).$$

В остальном формальный способ получения решения ничем не отличается от предыдущего.

Мы можем из наших формул, не производя всех вычислений, вывести одно физически очень важное следствие.

Предположим сначала, что „возмущение“ $\varphi(t)$ является чисто периодической функцией, например пусть $\varphi(t) = \cos \omega t$. Тогда $x_0(t)$ содержит тот же период, а именно эта функция может быть представлена в форме:

$$x_0(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t + c_1 \cos \chi t + c_2 \sin \chi t,$$

где α , β и c_1 , c_2 — постоянные.

Функция $x_0^2 = \phi_1$ может быть тогда записана на основании элементарных тригонометрических формул в форме:

$$\begin{aligned} \phi_1 = & a_0 + a_1 \cos 2\omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 2\chi t + a_4 \sin 2\chi t + \\ & + a_5 \cos(\omega + \chi)t + a_6 \cos(\omega - \chi)t + a_7 \sin(\omega + \chi)t + a_8 \sin(\omega - \chi)t, \end{aligned}$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ — постоянные. Второе дифференциальное уравнение для функции $x_1(t)$ дает для этой функции выражение, являющееся линейной комбинацией гармонических колебаний, среди которых кроме частот ω и χ появляются еще частоты 2ω , $\omega \pm \chi$, 2χ . Мы видим таким образом, что если пренебречь членами, содержащими σ в степени выше первой, то чисто периодическая сила с частотой ω вызывает движение, содержащее кроме частот ω и χ еще частоты 2ω , $\omega + \chi$, $\omega - \chi$ и 2χ .

Если данное возмущение составляется путем сложения двух чисто периодических возмущений, например если

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \cos \omega_1 t,$$

то мы таким же образом можем убедиться, что если отбросить члены порядка выше первого относительно σ , то движение может быть также рассматриваемо как сумма гармонических колебаний, из которых одно имеет собственную частоту χ , два других имеют возмущающие частоты ω и ω_1 , а остальные имеют своими частотами величины $\omega \pm \omega_1$, $\omega \pm \chi$, $\omega_1 \pm \chi$, 2ω , $2\omega_1$, 2χ , получающиеся путем комбинирования трех частот ω , ω_1 , χ . Эти комбинированные частоты тем менее заметны, чем меньше множитель σ . Во многих случаях подобные комбинированные частоты (комбинированные тоны) достигают заметной силы и могут быть явно восприняты.

§ 4. Замечания общего характера относительно дифференциальных уравнений.

Мы вышли бы далеко за пределы нашей книги, если бы захотели рассмотреть вопросы теории дифференциальных уравнений хотя бы в несколько более общем виде. Все же мы приведем здесь в заключение краткий очерк основ такого общего способа рассмотрения.

1. Дифференциальное уравнение первого порядка и его геометрическое истолкование. Мы начинаем с рассмотрения дифференциального уравнения первого порядка, т. е. уравнения, содержащего кроме x и $y(x)$ еще и первую производную функции $y(x)$ от независимой переменной x , но не содержащего высших производных этой функции. Общим видом такого дифференциального уравнения будет уравнение:

$$F(x, y, y') = 0,$$

причем мы предполагаем, что функция F непрерывно дифференцируема по своим трем аргументам x , y и y' . Постараемся наглядно уяснить себе геометрическое значение этого уравнения. Это уравнение представляет собой для точек плоской области с координатами x , y условие, которому должно удовлетворять направление касательной ко всякой кривой $y(x)$, проходящей через данную точку и удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению. Предположим, что в некоторой области G плоскости x , y , например внутри некоторого прямоугольника, уравнение $F(x, y, y') = 0$ однозначно разрешимо относительно y' .

Мы можем тогда привести данное дифференциальное уравнение к виду:

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ является непрерывно дифференцируемой функцией от x и y . Тогда это дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ относит каждой точке x , y области G определенное „направление перемещения“. Таким образом наше дифференциальное уравнение геометрически изображается „полем направлений“, и задача решения дифференциального уравнения с геометрической точки зрения заключается в нахождении тех кривых, которые вмещаются в данное поле направлений, т. е. касательные которых имеют в каждой точке направление, заданное условием $y' = f(x, y)$. Эти кривые называются интегральными кривыми дифференциального уравнения.

Можно доказать в самом общем виде, что, действительно, через каждую точку x , y области G проходит одна и только одна интегральная кривая нашего дифференциального уравнения¹⁾. Если например наша область представляет собой прямоугольник, содержащий отрезок оси y или параллельной ей прямой $x = x_0$, то мы можем через каждую точку этого отрезка провести интегральную кривую. Другими словами, мы можем найти такое решение нашего дифференциального уравнения в окрестности точки $x = 0$ или $x = x_0$, чтобы $y(0) = c$ или $y(x_0) = c$, где c есть параметр, который может быть произвольно выбран внутри известного интервала. Наша область покрывается таким обра-

¹⁾ При этом существенную роль играет сформулированное выше условие непрерывной дифференцируемости правой части $f(x, y)$ данного дифференциального уравнения.

зом семейством кривых, зависящих от одного параметра. Не останавливаясь здесь на доказательстве основной теоремы, мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров.

Для дифференциального уравнения

$$y' = -\frac{x}{y},$$

рассматриваемого хотя бы в области $y < 0$, направление поля, как это сразу видно, перпендикулярно к радиусу-вектору точки x, y . Отсюда следует геометрически, что дуги окружностей, имеющих центром начало координат, являются интегральными кривыми данного дифференциального уравнения. Аналитически очень легко проверить этот результат, ибо из уравнения этих окружностей

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}$$

непосредственно следует, что

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}},$$

откуда сразу видно, что эти окружности удовлетворяют рассматриваемому дифференциальному уравнению.

Поле направлений дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x}$$

имеет, очевидно, в каждой точке направление, совпадающее с направлением радиуса-вектора этой точки. Отсюда следует, что прямолинейные лучи, выходящие из начала координат, вмещаются в это поле направлений и являются поэтому интегральными кривыми. В самом деле, сразу видно, что функции $y = cx$ при любом c удовлетворяют нашему дифференциальному уравнению ¹⁾.

Точно так же легко проверить аналитически, что дифференциальным уравнениям

$$y' = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

и

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

удовлетворяют семейства гипербол

$$y = \sqrt{c^2 + x^2} \text{ в первом случае}$$

и

$$y = \frac{c}{x} \text{ во втором,}$$

где c есть постоянная, характеризующая отдельные кривые семейства.

¹⁾ Это поле направлений характеризуется тем, что в начале координат оно совершенно не определено, и с этим связано то обстоятельство, что через такую особую точку дифференциального уравнения "проходит бесконечное множество интегральных кривых."

Основная теорема показывает, что вообще дифференциальным уравнениям первого порядка удовлетворяют такие функции от x , которые кроме x зависят еще от параметра c — „произвольной постоянной интегрирования“. Обыкновенное интегрирование функции $f(x)$ является ни чем иным как частным случаем интегрирования нашего дифференциального уравнения, а именно для того особого случая, когда $f(x, y)$ не содержит y . В этом случае все направления поля всецело определяются координатой x , откуда непосредственно следует, что интегральные кривые получаются друг из друга параллельным перемещением по направлению оси y ; аналитически это выражается тем нам хорошо известным фактом, что при неопределенном интегрировании, т. е. при решении дифференциального уравнения $y' = f(x)$, функция y определена только с точностью до произвольной аддитивной постоянной c .

Геометрическое истолкование дифференциального уравнения приводит к приближенному графическому интегрированию, т. е. к графическому построению интегральных кривых, которое совершенно аналогично методам графического интегрирования, рассмотренным нами в первом томе (гл. II, § 5) в специальном случае неопределенного интегрирования функции от x .

Для этого достаточно заменить интегральные кривые ломаными линиями, у которых каждая сторона имеет направление, приписанное заданным полем начальной точке (или какой-нибудь другой точке) этой стороны. Такую ломаную линию мы можем провести через всякую точку области G . Чем меньше длина каждой стороны ломаной линии, тем с большей степенью точности сторона ломаной линии укладывается в поле направлений данного дифференциального уравнения не только в своей начальной точке, но и на всем своем протяжении. Не приводя доказательства, мы отметим здесь только тот факт, что при неограниченном убывании длины сторон построенной ломаной линии эта ломаная линия действительно имеет своим пределом интегральную кривую, проведенную через ее начальную точку.

2. Дифференциальное уравнение семейства кривых. Особые решения. Согласно теореме существования каждому дифференциальному уравнению соответствует семейство кривых.

Возникает вопрос, может ли это соответствие быть обращено. Другими словами: существует ли для всякого семейства кривых $\varphi(x, y, c) = 0$ или $y = g(x, c)$, зависящего от одного параметра c , такое дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0,$$

которому удовлетворяют все кривые семейства, и как получается это дифференциальное уравнение. Существенным является при этом то обстоятельство, что в дифференциальном уравнении семейства кривых уже не содержится параметр c этого семейства, так что наше дифференциальное уравнение дает нам свободное от параметра изображение семейства кривых.

Дифференцированием по x мы из уравнения

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

получаем:

$$\varphi_x + \varphi_y y' = 0.$$

Исключая из этого уравнения и из уравнения $\varphi = 0$ параметр c , мы в качестве результата этого элиминирования и получаем искомое дифференциальное уравнение. Это исключение параметра c всегда возможно для всякой области плоскости x, y , внутри которой мы можем из уравнения $\varphi = 0$ выразить параметр c однозначно через x и y , ибо мы можем тогда в функциях φ_x и φ_y заменить c получающимся выражением $c = c(x, y)$, и уравнение $\varphi_x + \varphi_y y' = 0$ дает нам тогда искомое дифференциальное уравнение семейства.

В качестве примера приведем сначала семейство концентрических окружностей

$$x^2 + y^2 - c^2 = 0.$$

Дифференцируя по x , мы непосредственно получаем дифференциальное уравнение:

$$x + y y' = 0$$

в полном соответствии с п° 1.

Дальнейший пример нам дает семейство кругов радиуса, равного единице, центры которых лежат на оси x , т. е. семейство

$$(x - c)^2 + y^2 = 1.$$

Дифференцируя по x , мы получаем:

$$(x - c)' + y y' = 0.$$

Исключая c , мы получаем дифференциальное уравнение

$$1 - y^2 = y^2 y'^2 \quad \text{или} \quad y^2(1 + y'^2) = 1.$$

Семейство парабол $y = (x - c)^2$, касающихся оси x , дает таким же образом с помощью уравнения $y' = 2(x - c)$ искомое дифференциальное уравнение

$$y'^2 = 4y^2.$$

В последних двух примерах мы можем легко убедиться, что соответствующему дифференциальному уравнению удовлетворяют не только кривые семейства, но еще и другие кривые: в первом случае обе прямые $y = 1$ и $y = -1$, а во втором — ось x $y = 0$. Эти факты, которые аналитически можно непосредственно проверить, вытекают без вычислений из геометрического значения дифференциального уравнения, ибо перечисленные прямые являются огибающими соответствующих семейств кривых, а так как огибающая в каждой точке касается кривой семейства, то она в каждой точке имеет как раз то направление, которое приписывается этой точке заданным полем направлений; таким образом всякая огибающая семейства интегральных кривых также удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Такие решения дифференциального уравнения, получающиеся путем построения огибающей семейства интегральных кривых, зависящего от одного параметра, называются особыми решениями ¹⁾.

¹⁾ Любопытно, что особые решения дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ можно найти и не интегрируя этого дифференциального уравнения, т. е. и не найдя предварительно семейства регулярных решений, зависящего от одного параметра. Для этого заметим, что согласно нашей основной теореме решения дифференциаль-

3. Системы дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения высших порядков. Большая часть наших предыдущих соображений соответственным образом переносится на систему дифференциальных уравнений первого порядка, в которой число искомых функций от независимой переменной x равно числу уравнений. В качестве достаточно общего примера рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $y(x)$ и $z(x)$:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, z), \\z' &= g(x, y, z).\end{aligned}$$

Мы снова предполагаем, что функции f и g непрерывно дифференцируемы. Эту систему дифференциальных уравнений также можно представить с помощью поля направлений, а именно с помощью пространственного поля направлений, расположенного в пространстве x, y, z . В самом деле, с помощью данной системы дифференциальных уравнений каждой точке x, y, z этого пространства приводится в соответствие направление, направляющие косинусы которого относятся как $dx:dy:dz = 1:f:g$. Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений сводится снова с геометрической точки зрения к задаче нахождения тех пространственных кривых, которые укладываются в данное поле направлений. Как и для одного дифференциального уравнения, так и здесь имеет место фундаментальная теорема существования, гласящая, что через каждую точку области G , в которой правые части обоих уравнений непрерывно дифференцируемы, проходит одна и только одна интегральная кривая системы дифференциальных уравнений. Область G покрывается таким образом семейством пространственных кривых, зависящим от двух параметров; эти кривые дают решение системы дифференциальных уравнений с помощью двух функций $y(x)$ и $z(x)$, которые кроме независимой переменной x содержат еще два произвольных параметра c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

ного уравнения однозначно определены в окрестности точки x, y , если в этой точке дифференциальное уравнение может быть представлено в виде $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ является непрерывно дифференцируемой функцией. Отсюда следует, что в точках, в которых кроме регулярных решений существует еще особое решение, приведение дифференциального уравнения к такому виду невозможно. Поэтому дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$ в этих точках не может быть разрешимо относительно y' . Так как согласно нашим теоремам о разрешимости уравнений (гл. III, § 1) уравнение $F = 0$ безусловно разрешимо относительно y' , если в соответствующей точке $F_{y'} \neq 0$, то мы получаем в качестве необходимого (но ни в коем случае не достаточного) условия для точек особого решения уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0.$$

Исключая из этого уравнения и заданного дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ величину y' , мы получаем уравнение, содержащее только x, y , которому должно удовлетворять наше искомое особое решение, если оно существует.

Приведенные нами выше примеры подтверждают это правило. Так например из дифференциального уравнения $y^2(1 + y'^2) = 1$ мы получаем, дифференцируя по y' , уравнение $y^2 y' = 0$.

Тогда, при соблюдении этого условия, наше дифференциальное уравнение превращается в уравнение $y^2 = 1$ или $y = \pm 1$ и дает нам действительно рассмотренные выше особые решения.

Системы дифференциальных уравнений первого порядка приобретают особенно важное значение вследствие того, что дифференциальные уравнения высшего порядка, т. е. дифференциальные уравнения, содержащие производные порядка выше первого, всегда могут быть сведены к системам дифференциальных уравнений первого порядка; так например дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = h(x, y, y')$$

можно записать в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка; для этого достаточно ввести в качестве новой искомой функции z первую производную от y по x и написать тогда систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= h(x, y, z). \end{aligned}$$

Эта система вполне эквивалентна данному дифференциальному уравнению второго порядка в том смысле, что всякое решение одной из этих двух проблем дает вместе с тем и решение другой проблемы.

Я не имею возможности здесь подробнее рассмотреть эти вопросы и укажу лишь для пояснения этих общих соображений на рассмотренные нами уже раньше отдельные примеры дифференциальных уравнений второго порядка (§§ 2 и 3).

4. Интегрирование с помощью степенных рядов. В заключение коснусь одного общего приема, которым часто можно пользоваться при интегрировании дифференциальных уравнений, а именно метода интегрирования с помощью степенных рядов.

Предположим, что в дифференциальном уравнении

$$y' = f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ может быть разложена в степенной ряд по обоим переменным x и y и имеет поэтому производные сколь угодно высокого порядка по x и y . Мы можем тогда попытаться получить решение этого дифференциального уравнения также в виде степенного ряда:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

и определить коэффициенты этого ряда на основании данного дифференциального уравнения¹⁾. Для этого мы можем поступить например так: образуем продифференцированный ряд:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots,$$

затем, разложив функцию $f(x, y)$ в степенной ряд, подставляем вместо y ряд $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ и приравниваем между собой коэффициенты при отдельных степенях x в правой и левой части дифференциального уравнения (метод неопределенных коэффициентов). Мы можем тогда, задав произвольно $c_0 = c$, последовательно определить коэффициенты c_1, c_2, c_3, \dots

¹⁾ Первые члены ряда представляют тогда аппроксимирующий полином для искомого решения; таким образом наряду с упомянутым в №1 графическим методом мы получаем аналитический метод приближенного интегрирования.

Однако обыкновенно более простым и наглядным является следующий способ: пусть например требуется найти то решение дифференциального уравнения, для которого $y(0) = 0$, т. е. для которого интегральная кривая проходит через начало координат; тогда $c_0 = c = 0$. Вспомнив, что по теореме Тэйлора коэффициенты степенного ряда задаются выражениями:

$$c_v = \frac{\lambda}{v!} y^{(v)}(0),$$

мы легко найдем эти коэффициенты. Прежде всего $c_1 = y'(0) = f(0, 0)$. Чтобы найти второй коэффициент c_2 , мы дифференцируем наше дифференциальное уравнение по x и получаем:

$$y''(x) = f_x + y' f_y.$$

Полагая справа $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = f(0, 0)$, мы получим значение второй производной $y''(0) = 2c_2$. Продолжая этот процесс, мы последовательно вычислим дальнейшие коэффициенты c_3 , c_4 , ... и т. д.

Мы не можем здесь остановиться на вопросе о том, когда этот процесс действительно дает сходящийся степенной ряд для $y(x)$. Напомним только, что мы уже раньше применяли и полностью провели метод неопределенных коэффициентов для интегрирования дифференциальных уравнений (том I, стр. 370 и след.).

§ 5. Потенциал притягивающих электрических масс.

Рассмотренные нами до сих пор дифференциальные уравнения, содержащие функции от одной независимой переменной и их производные, называются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этим указывается, что такие дифференциальные уравнения содержат только „обыкновенные“ производные функций от одной независимой переменной. Но во многих областях анализа и его применений играют большую роль „дифференциальные уравнения в частных производных“, служащие для определения функций от многих переменных и содержащие, кроме переменных, еще и частные производные искомым функций. В этом последнем параграфе мы приведем простой и типичный пример такого дифференциального уравнения в частных производных в связи с теорией притяжения масс.

Мы уже раньше рассматривали поля сил, создаваемые массами, притягивающими по закону тяготения Ньютона, и представили их в виде градиентов потенциала Φ (гл. IV, § 7, стр. 228 и след.). В настоящем параграфе мы несколько подробнее остановимся на потенциалах этого рода¹⁾.

1. Потенциал непрерывно распределенной массы. Обобщая рассмотренные раньше случаи, мы понимаем теперь под μ положительную или отрицательную массу или заряд (отрицательные массы не встречаются, правда, в обыкновенной теории притяжения Ньютона, но в теории электричества электрические массы могут иметь какой угодно знак, так как понятию массы здесь соответствует понятие количества электричества, которое может быть

¹⁾ Для подробного ознакомления с этой очень важной областью анализа укажу например на Poincaré, „Théorie du Potential Newtonien“, Paris 1899.

как положительным, так и отрицательным; закон Кулона, по которому происходит притяжение электрических масс, имеет такую же форму, как и закон притяжения механических масс). Если такой заряд μ сосредоточен в одной единственной точке пространства с координатами ξ, η, ζ , то выражение $\frac{\mu}{r}$,

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$, мы называем потенциалом этого заряда в точке (x, y, z) . Складывая потенциалы конечного числа зарядов, сосредоточенных в точках ξ_i, η_i, ζ_i („полюсах“ или „источниках“ соответствующих потенциалов), мы получим, как и раньше (стр. 228), потенциал системы точечных зарядов

$$\Phi = \sum_i \frac{\mu_i}{r_i}.$$

Из этих потенциалов мы получили в свое время соответствующие поля сил с помощью выражения:

$$K = \chi \operatorname{grad} \Phi,$$

где χ есть постоянная величина, не зависящая от притягивающих масс и их взаимного расположения. Если массы не сосредоточены в отдельных точках, но распределены внутри определенной области G пространства ξ, η, ζ , то, обозначая через $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ плотность массы в точке (ξ, η, ζ) , мы рассматриваем в качестве потенциала этого объемного распределения массы, как мы это делали уже раньше, выражение:

$$\Phi = \iiint \frac{\mu}{r} d\xi d\eta d\zeta.$$

Если массы распределены по поверхности F и если μ означает поверхностную плотность этих масс, а $d\sigma$ — элемент поверхности то потенциал поверхности F выражается интегралом

$$\iint \frac{\mu(u, v)}{r} d\sigma,$$

распространенным по поверхности F .

Таким же образом для случая линейного распределения массы мы получаем для потенциала выражение вида:

$$\int \frac{\mu(s)}{r} ds,$$

где s означает длину дуги кривой, по которой распределена притягивающая масса, $\mu(s)$ — линейную плотность, а r — расстояние точки (x, y, z) от точки s притягивающей линии.

Для каждого такого потенциала поверхности

$$\Phi = \text{const}$$

называются эквипотенциальными поверхностями или поверхностями равного уровня; вектор силы всюду направлен перпендикулярно к поверхности уровня ¹⁾).

В качестве примера линейного потенциала рассмотрим следующий случай. Пусть вдоль отрезка оси z

$$-l \leq z \leq l$$

распределена масса с постоянной линейной плотностью μ . Возьмем на плоскости $z=0$ точку P с координатами x, y ; обозначая через $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ расстояние точки P от начала координат, мы получаем в качестве потенциала следующее выражение:

$$\Phi(x, y) = \mu \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + C.$$

Мы здесь прибавляем к интегралу еще постоянную C , совершенно не влияющую на обусловленный потенциалом силовой вектор, которую мы сейчас выберем соответствующим образом. Неопределенный интеграл от стоящего справа подынтегрального выражения равняется, как нам известно (т. I, гл. IV):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \operatorname{ar sh} \frac{z}{\rho} = \log \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\rho}.$$

Таким образом мы получаем для нашего потенциала значение:

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} + C.$$

Произвольной постоянной C мы придаем значение:

$$C = -2\mu \log 2l,$$

так что

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} - 2\mu \log 2l$$

или

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{2l} - 2\mu \log \rho.$$

Теперь мы имеем возможность неограниченно увеличивать величину l , т. е. длину прямой, вдоль которой распределена притягивающая масса.

¹⁾ Линии, обладающие тем свойством, что в каждой их точке вектор силы направлен по касательной к этой линии, называются силовыми линиями. Силовыми линиями являются следовательно те линии, которые всюду пересекают эквипотенциальные поверхности под прямым углом. Отсюда следует, что для потенциалов, имеющих один или конечное число полюсов, эти полюса являются как бы истоками силовых линий. Для случая одного единственного полюса силовыми линиями являются просто прямолинейные лучи, расходящиеся из этого полюса.

Выражение $\frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{2l}$ стремится при этом к единице, и мы получаем в качестве предела потенциала $\Phi(x, y)$ выражение:

$$\Phi(x, y) = -2\mu \log \rho.$$

Мы видим таким образом, что если не считать постоянного множителя -2μ , то потенциалом бесконечной однородной прямой, перпендикулярной к плоскости x, y , служит выражение:

$$\log \rho = \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Кроме перечисленных выше случаев распределения массы, в теории потенциала рассматривается еще случай так называемого двойного слоя, к которому мы приходим следующим образом. Представим себе, что в точке ξ, η, ζ сконцентрировано количество электричества M , а в точке с координатами $\xi + h, \eta, \zeta$ сосредоточен заряд $-M$ той же величины, но с обратным знаком. Потенциал этой пары зарядов равняется:

$$\Phi = \frac{M}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{M}{\sqrt{(x-\xi-h)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Пусть расстояние h обоих полюсов неограниченно уменьшается, но при этом пусть величина M неограниченно растет и притом так, что постоянно

$$M = -\frac{1}{h} \mu,$$

где μ — некоторая постоянная. Мы получим тогда в пределе для Φ выражение:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Это выражение мы называем потенциалом диполя или двойного полюса с осью, направленной по оси ξ , и „моментом“ μ . С физической точки зрения это есть потенциал пары одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов электричества, лежащих очень близко друг от друга. Таким же образом мы можем рассматривать потенциалы двойных полюсов вида:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right);$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает дифференцирование по любому направлению ν , которое является осью двойного полюса.

Представим себе теперь, что двойные полюсы распределены вдоль поверхности F с плотностью момента μ , и пусть ось двойного полюса в каждой точке поверхности направлена перпендикулярно к поверхности. Тогда потенциал задается выражением вида:

$$\iint_F \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает дифференцирование по положительной нормали (положительное направление нормали может быть при этом выбрано снова совершенно произвольно), r — расстояние точки поверхности ξ, η, ζ от точки x, y, z , а точка ξ, η, ζ описывает поверхность F . Подобного рода потенциал двойного слоя можно себе представить как потенциал, получающийся в результате следующего предельного процесса.

Проведем по обе стороны от данной поверхности на расстоянии h от нее две параллельные ей поверхности, и пусть на одной поверхности распределена масса с плотностью $\frac{\mu}{2h}$, а на другой — масса с плотностью $-\frac{\mu}{2h}$.

Потенциал этих двух слоев в какой-нибудь внешней точке стремится при $h \rightarrow 0$ к нашему стоящему выше выражению. Простоты ради мы будем предполагать, что во всех наших выражениях точка x, y, z находится в части пространства, не содержащей в себе притягивающих масс, так что подынтегральные выражения наших интегралов и их производные по x, y, z остаются непрерывными в этой части пространства.

2. Дифференциальное уравнение потенциала. При выполнении этих условий мы можем вывести соотношение, которому удовлетворяют все наши выражения для потенциала, а именно так называемое дифференциальное уравнение потенциала:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0,$$

или, как мы пишем сокращенно:

$$\Delta \Phi = 0.$$

В самом деле, этому соотношению удовлетворяет выражение $\frac{1}{r}$, как мы уже установили (стр. 56) раньше путем простого вычисления. Но отсюда тотчас же следует, что и все остальные наши выражения, получающиеся из $\frac{1}{r}$ путем суммирования или интегрирования, также удовлетворяют этому соотношению, ибо мы имеем право производить дифференцирование под знаком интеграла. Что касается потенциалов двойного слоя, то они также удовлетворяют нашему дифференциальному уравнению, что таким же образом следует из того, что для потенциала одного единственного двойного полюса имеет место в силу переместительности порядка дифференцирования соотношение ¹⁾:

$$\Delta \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

¹⁾ При этом следует иметь в виду, что дифференцирование $\frac{\partial}{\partial \nu}$ относится к переменным ξ, η, ζ , тогда как операция, обозначаемая знаком Δ , относится к переменным x, y, z . Впрочем, выражение $\frac{1}{r}$, рассматриваемое как функция шести переменных $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$, удовлетворяет также и в отношении переменных ξ, η, ζ дифференциальному уравнению:

$$\Delta \Phi = \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0,$$

что следует из симметрии выражения $\frac{1}{r}$ относительно обеих систем переменных.

Потенциал вертикальной линии, равный, как мы установили выше,

$$\log \sqrt{x^2 + y^2},$$

удовлетворяет так же, как в этом легко убедиться (см. также стр. 73), нашему дифференциальному уравнению потенциала и притом, так как этот потенциал не содержит переменной z , то он удовлетворяет более простому „уравнению потенциала для случая двух измерений“:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Исследование этих и аналогичных дифференциальных уравнений в частных производных является одной из наиболее важных проблем анализа.

3. Однородный двойной слой. Мы не можем здесь подробнее остановиться на исследовании потенциальных функций, т. е. функций, удовлетворяющих уравнению потенциала $\Delta u = 0$. Это исследование опирается главным образом на доказанные нами в предыдущей главе теоремы Гаусса и Грина. Покажем только на нескольких примерах, как производятся такие исследования.

Рассмотрим прежде всего потенциал двойного слоя с постоянным моментом $\mu = 1$, т. е. интеграл

$$S = \iint_F \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Этот интеграл имеет очень простое геометрическое значение. Предположим сначала, что из точки P с координатами x, y, z видны все точки поверхности F , по которой распределен двойной слой, т. е. что всякая точка поверхности F может быть соединена с точкой P прямолинейным отрезком, не пересекающим F ни в какой другой точке. Тогда поверхность F и все лучи, проведенные из точки P к границе F , образуют конусообразную пространственную область G . Мы утверждаем, что потенциал двойного слоя с точностью до знака равняется телесному углу, под которым граница поверхности F видна из точки P ; под телесным углом мы понимаем при этом площадь той части поверхности шара радиуса, равного единице, описанного из точки P , которая вырезается лучами, соединяющими точку P с границей поверхности F . Мы приписываем этому телесному углу положительный или отрицательный знак в зависимости от того, пересекают ли эти лучи поверхность F в том же направлении, что и положительная нормаль ν , или нет.

Для доказательства заметим, что функция $u = \frac{1}{r}$ не только как функция от x, y, z , но и как функция от ξ, η, ζ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = \Delta u = 0$$

Представим себе точку P с координатами x, y, z неподвижной и обозначим прямоугольные координаты точек области G через ξ, η, ζ . Вырежем из G вершину этой конической области с помощью небольшого шара, описанного из P радиусом ρ ; остающуюся область обозначим через G_ρ . При-

меним теперь к функции $u = \frac{1}{r}$, рассматриваемой как функция от ξ, η, ζ , заданная в области G_p , теорему Грина (гл. V) в форме:

$$\iiint_{G_p} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma,$$

где Σ означает поверхность области G_p , $d\sigma$ — элемент поверхности, $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по внешней нормали. Так как ¹⁾ $\Delta u = 0$, то левая часть этого уравнения равна нулю.

Но стоящий справа интеграл, распространенный по поверхности Σ , является суммой трех интегралов. Первое слагаемое этого интеграла является интегралу

$$\iint_F \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \, d\sigma = \iint_F \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) \, d\sigma,$$

распространенному по поверхности F , т. е. как раз рассмотренному выше выражению S , если мы примем направление внешней нормали n за положительное направление нормали ν к поверхности F . Второе слагаемое равняется интегралу, распространенному по боковой поверхности, образованной прямолинейными лучами, а третье слагаемое представляет собой интеграл, распространенный по части Γ , поверхности сферы радиуса ρ . Второе слагаемое равно нулю, так как там направление нормали n перпендикулярно к радиусу и следовательно касается шара $r = \text{const}$. Для внутреннего же шара радиуса ρ символ $\frac{\partial}{\partial n}$ равносильен символу $-\frac{\partial}{\partial \rho}$, так как направление внешней нормали совпадает с направлением убывания радиуса r . Мы получаем таким образом уравнение:

$$S - \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) \, d\sigma = 0$$

или

$$S = -\frac{1}{\rho^2} \iint_{\Gamma} d\sigma,$$

где стоящий справа интеграл должен быть распространен по части Γ , сферической поверхности радиуса ρ , принадлежащей границе области G_p . Элемент $d\sigma$ этой сферической поверхности мы можем записать в виде $d\sigma = \rho^2 \, d\omega$,

¹⁾ Вообще из формулы Грина, написанной в этом виде, следует, что если функция u внутри некоторой замкнутой поверхности F удовлетворяет уравнению потенциала $\Delta u = 0$ то интеграл $\iint \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$, распространенный по этой замкнутой поверхности, должен обращаться в нуль.

где $d\omega$ означает элемент поверхности шара радиуса, равного единице. Мы получаем тогда:

$$S = - \iint d\omega.$$

Стоящий справа интеграл распространяется по части поверхности шара радиуса, равного единице, заключенной внутри нашего конуса, и мы видим таким образом, что этот интеграл, действительно имеет то геометрическое значение, о котором говорится в доказываемой нами теореме, т. е. равняется углу, под которым поверхность F видна из точки P , взятому с отрицательным знаком, если за направление нормали ν на F взято направление нормали внешней относительно конической области Q^1). В противном случае этот телесный угол следует взять с положительным знаком.

Если наша поверхность F не расположена так просто относительно точки P , но многократно пересекает известную часть лучей, выходящих из этой точки, то достаточно разбить эту поверхность на части, положение которых относительно точки P удовлетворяет сделанному нами выше допущению, чтобы убедиться в том, что наше утверждение остается в силе также и в этом случае. Итак потенциал однородного двойного слоя (момента $\mu=1$), распределенного по поверхности, имеющей границу, равняется с точностью до знака телесному углу, под которым граница видна из точки (x, y, z) .

Для замкнутой поверхности наше выражение равно нулю, если точка P лежит вне поверхности, и равно -4π , если P лежит внутри, в чем мы убеждаемся, разбивая замкнутую поверхность на две части, имеющие границу.

Совершенно аналогичное рассуждение для случая двух независимых переменных показывает, что интеграл

$$\int_C \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) ds,$$

взятый вдоль дуги кривой C , с точностью до знака, равен углу, под которым эта дуга видна из точки с координатами x, y .

Этот результат, как и соответствующий результат для случая трех измерений, можно было бы также вывести непосредственно геометрически следующим образом.

Пусть точка Q с координатами ξ и η лежит на дуге кривой C . Тогда производная по нормали к кривой от функции $\log r$ выражается формулой:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) = \frac{\partial}{\partial r} (\log r) \cos(\nu, r) = \frac{1}{r} \cos(\nu, r),$$

где символ (ν, r) означает угол между нормалью ν и направлением радиус-вектора r . С другой стороны, элемент дуги ds в полярных координатах r, φ выражается следующим образом:

$$ds = \frac{r d\varphi}{\cos(\nu, r)}$$

¹⁾ Отрицательный знак объясняется тем, что при этом выборе направления нормали отрицательный заряд „ближе“ к точке P , чем положительный.

(т. I, стр. 226 и 237), так что наш интеграл преобразовывается следующим образом:

$$\int \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) ds = \int \frac{1}{r} \cos(\nu, r) \frac{r d\varphi}{\cos(\nu, r)} = \int d\varphi.$$

Но последнее выражение справа как раз равняется углу, под которым дуга S видна из точки x , y , что и требовалось доказать.

4. Теорема о среднем значении. В качестве второго применения преобразований Грина приведем следующую теорему. Всякая потенциальная функция, т. е. всякая функция u , удовлетворяющая в некоторой области G дифференциальному уравнению $\Delta u = 0$, обладает следующим свойством: значение потенциальной функции в центре P произвольного шара радиуса r , всецело лежащего внутри области G , равняется среднему значению функции u на поверхности K_r этого шара, т. е.

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{K_r} \bar{u} d\sigma,$$

где $u(x, y, z)$ есть значение функции u в центре P , а \bar{u} — значение этой функции на поверхности K_r шара радиуса r .

Для доказательства вырежем сначала из нашего шара небольшой концентрический шар радиуса ρ и применим к области G_ρ , заключенной между обеими шаровыми поверхностями, формулу Грина:

$$\iint_{G_\rho} (u \Delta v - v \Delta u) d\xi d\eta d\zeta = \iint \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma,$$

принимая при этом за v функцию $\frac{1}{r}$, где r означает расстояние от центра

(x, y, z) рассматриваемой сферы до точки (ξ, η, ζ) , причем $\frac{1}{r}$ так же, как и $u(\xi, \eta, \zeta)$ рассматривается как функция от ξ, η, ζ . По предположению $\Delta u = 0$, но Δv также равняется нулю внутри области интегрирования, поэтому правая часть формулы Грина равна нулю. Эта правая часть состоит, во-первых, из интеграла

$$-\frac{1}{r^3} \iint_{K_r} u d\sigma - \frac{1}{r} \iint_{K_r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

распространенного по внешней шаровой поверхности K_r радиуса r , и, во-вторых, из интеграла

$$\frac{1}{\rho^3} \iint_{K_\rho} u d\sigma - \frac{1}{\rho} \iint_{K_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Согласно примечанию на стр. 340 оба интеграла

$$\iint_{K_r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \text{ и } \iint_{K_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

равны нулю. Мы получаем таким образом уравнение:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{K_r} u \, d\sigma = \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{K_\rho} u \, d\sigma.$$

Слева стоит как раз то выражение, которое мы назвали выше средним значением функции u на поверхности K_r , тогда как стоящее справа выражение формально зависит от ρ . Но шар K_ρ мы можем выбрать совершенно произвольно и сделать сколь угодно малым. Когда ρ стремится к нулю, то значения функции u на поверхности K_ρ в силу предположенной непрерывности функции u неограниченно приближаются к значению $u(x, y, z) = u(P)$ функции u в центре шара; это значит, что разность $\delta = u(\xi, \eta, \zeta) - u(P)$ между значениями функции u на поверхности K_ρ и ее значением в центре P удовлетворяет неравенству $|\delta| < \varepsilon$, где ε означает положительное число, стремящееся к нулю вместе с ρ . Если мы теперь наведем предыдущее уравнение в виде:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{K_r} u \, d\sigma = \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{K_\rho} u(P) \, d\sigma + \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{K_\rho} \delta \, d\sigma,$$

то мы тотчас же видим, что первое слагаемое справа равно $u(P)$ и таким образом вовсе не зависит от ρ . Второе слагаемое мы оцениваем следующим образом:

$$\left| \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{K_\rho} \delta \, d\sigma \right| \leq \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{K_\rho} |\delta| \, d\sigma \leq \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{K_\rho} \varepsilon \, d\sigma = \varepsilon.$$

Но левая часть нашего уравнения так же, как и первое слагаемое правой части, не зависит от ρ ; поэтому второе слагаемое правой части есть также не зависящая от ρ величина. Из предыдущего же неравенства мы заключаем, что эта величина должна быть меньше ε , где при достаточно малом ρ число ε может быть сделано меньше любого сколь угодно малого числа. Отсюда следует, что второе слагаемое правой части нашего уравнения равно нулю, и наша теорема о среднем значении потенциалов функций доказана.

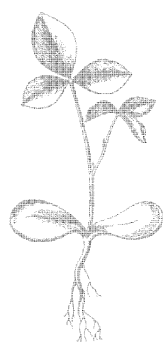
Точно таким же образом, только пользуясь вместо $\frac{1}{r}$ функцией $\log r$, можно и для функции u от двух переменных, удовлетворяющей уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

вывести соответствующее свойство среднего значения для круга, выражающееся формулой:

$$2\pi u(x, y) = \iint_{K_r} \bar{u} \, ds,$$

где через \bar{u} обозначены значения потенциальной функции на окружности K_r , описанной из точки (x, y) радиусом r , а через s — длина дуги этой окружности.



ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Алгебраическая функция 43, 105.
 Аппроксимирующий многочлен 74.
 Астроида 144.
 Аффинное преобразование 28—31.
 Балка, момент инерции 228.
 Бесконечная область интегрирования 211—212.
 Бесконечно-малая 50.
 Бета-функция (β -функция) 247—248.
 Больцано-Вейерштрасса, принцип предельных точек 86.
 Вектор, свободный 11.
 — связанный 11.
 — кривизны 81.
 — перемещения 255.
 — векторное умножение 20—21.
 — скалярное умножение 14.
 — векторное поле 78.
 Верхняя сумма 178.
 Ветвь функции 42.
 Вихрь см. Ротор.
 Время обращения 319.
 Высшее гармоническое колебание 326.
 Гамма-функция (γ -функция) 244, 247—248.
 Гаусса теорема 264—268, 287—292, 300—302.
 — векторная формулировка 266, 290.
 — наглядная интерпретация 271, 291.
 — в плоскости 264—268.
 — в пространстве 287—292.
 Гауссовы коэффициенты квадрата линейного элемента 186, 223.
 Географическая долгота 122.
 Гипербола, равносторонняя 118, 138.
 Гиперболическая точка 45, 150.
 Гиперболический параболоид 44, 100.
 Главная диагональ 75.
 — нормаль 81.
 Главное направление колебания 313.
 Гладкие дуги кривых 207.
 — теорема 234—236.
 Градиент 82, 110.
 — и производная 82.
 Градиентный характер векторного поля 258.
 Граничная точка 42.
 Грина формула в плоскости 268—270.
 — — в пространстве 293.
 Дальность полета 312.
 Движение планет 315—320.
 — уравнения 306.
 — энергия 308.
 Двойная точка 168.
 Двойной интеграл 193.
 — корень 168.
 — полюс 337.
 — предел 91, 92, 93, 94.
 — слой 337—338.
 — — однородный 339—342.
 Двойные последовательности 90.
 Декарта лист 104.
 Диаметр точечного множества 88.
 Дивергенция векторного поля 84.
 — — — наглядное истолкование 272—273, 291—292.
 Дини теорема 95.
 Диполь 337.
 Дискриминантная поверхность 146.
 Дискриминантное уравнение 140—147.
 Дифференциал 60.
 — полный 66.
 Дифференциалы высших порядков 67—68.
 Дифференциальные уравнения
 — — в частных производных 334—343.
 — — высших порядков 332—333.
 — — геометрическая интерпретация 328.
 — — движения материальной точки 305.
 — — интегрирование 307, 320—334.
 — — линейные 320.
 — — обыкновенные 305—334.
 — — особые решения 331.
 — — особые точки 329.
 — — первого порядка 328.
 — — поле направлений 328, 332.
 — — порядок 320.
 — — системы 332—333.
 — — существования решения 330.
 Дифференцирование обратных функций 123.
 — по данному направлению 63—65.
 — по области 188—189.
 — интегрирование для случая многих переменных 297—300.
 — неявных функций 101—104.
 — векторов 79—80.

Дифференцирование обратных функций
под знаком интеграла 173, 241—243.

- скалярного произведения 80.
- векторного произведения 80.
- по параметру 173—177, 241—243.
- изменение порядка 57.

Дифференцируемость 60—63

- и непрерывность 56—57.
 - и существование производных 65—66.
- Длина дуги кривой на поверхности 135—136.

Единичный вектор 12.

Зависимые функции 131, 132.

Закон распределительности 14.

- переместительности 14.
- тяготения 79.
- сохранения энергии 308.
- площадей 316.

Замкнутая область 42.

Замкнутое точечное множество 88.

Изображение области 116.

- кривой 116.

- точки 28.

Изолированная точка 169.

Инверсия 117.

Интеграл криволинейный, см. Криволинейный интеграл.

Интеграл по области

- определение 178, 179.
- существование 179, 231—237.
- непрерывная зависимость от подынтегрального выражения 186.
- приведение к обыкновенным интегралам 189—198.

Интеграл, взятый по поверхности 276—287.

- определение 282—285.

- физическая интерпретация 285.

- векторная запись 284.

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ 212

- как функция параметра 171—177, 237—246.

- не собственный 206—214.

Интегральные кривые 328.

- огибающая 331.

Интегрирование дифференциальных уравнений 307, 320—334.

- графическое 330.

- с помощью степенных рядов 333.

- полных дифференциалов 255—257.

- интеграла по параметру 173.

Интегрирование и дифференцирование для случая многих переменных 297—300.

Источник 272, 293, 335.

Исчерпывание 211, 213.

Касание кривых 111.

Касательная 108.

- плоскость 65, 114.

Квадратичная форма 164.

Квадратичное дифференциальное выражение 136.

Кеплера законы 315—320.

Кинетическая энергия 227, 308.

Колебание около положения равновесия 312—315.

- вынужденное 322.

- несимметрическое 324

- эллиптическое, линейное и круговое 314.

Комбинированные тоны 323—327.

- частоты 327.

Компоненты вектора 11.

Консервативное поле сил 307.

Координатные линии 119.

- поверхности 121.

Координатная сеть 116.

Коши, признак сходимости 87, 90.

- обозначения 53.

Коэффициент искажения 271.

Краевая точка 89.

Краевое значение 48.

Кривизна 110.

Кривые в неявном виде 108—113.

- в n -мерном пространстве 253.

Криволинейный интеграл 250—263.

- определение 250, 251.

- основная теорема 257—263

- механическое истолкование 255.

- векторная формулировка 253.

Криволинейные координаты 119.

Криволинейная сеть 116.

Кулона закон 335.

Лагранжа множитель 154.

Лапласа выражение 73, 85.

- — преобразование к полярным координатам 73.

Левая система, левый винт 10.

Лейбница обозначение 183.

Лемниската 103.

Линейные дифференциальные уравнения 320—323.

Линейные уравнения 26, 27.

Линейные колебания 314.

Линейная плотность 335.

- часть приращения функции 61.

- — приближенное выражение с помощью линейной функции 62.

Линейный элемент на поверхности 136.

Линии уровня 45, 83.

- сил 285.

Максимум 148.

- условный 152—161.

- см. Экстремум.

Масса 183—184.

- Материальная точка** 305.
Мебиуса лист 280.
Метод неопределенных коэффициентов 333.
Механика материальной точки 305—320.
Минимум см. экстремум.
Многосвязная область 40—41.
Многочлен 43.
Множество, точечное 38.
Момент 21.
 — диполя 337.
 — инерции 227—228.
 — количества движения 316.
 — скоростей 316.
 — статический 224—226.
Монотонная последовательность областей 213.
 — функций 95.
Набла 85.
Направление обхода 10.
Направляющие косинусы прямой 17.
 — — нормали к поверхности 109, 114.
Напряжение вихря см. Сила вихря.
Негармонические колебания 323—327.
Неориентируемые поверхности 280.
Неопределенная форма 164.
Несобственный интеграл 206—214.
 — как функция параметра 237—248.
 — — дифференцирование и интегрирование по параметру 241—243.
 — — изменение порядка интегрирования 242.
Несобственное преобразование 132.
Непрерывность, определение 46.
 — и существование производных 56—57.
 — неявных функций 107.
Непрерывная дифференцируемость 63.
Несжимаемая жидкость 271, 285, 291, 296.
Неявные функции 99—107.
 — существование и непрерывность 106—107.
 — — дифференцирование 101—103, 104—106.
Неустойчивое равновесие 309.
Нижняя сумма 178.
 — точка накопления 249.
Номография 116.
Нормали 108.
Нормальное ускорение 82.
Ньютона закон тяготения 79, 306, 315.
 — основные уравнения механики 305.
Объем, определение 231.
 — элементарный способ вычисления 214.
 — выражение в полярных координатах 218.
 — выражение в виде поверхностного интеграла 285—287, 290.
 — определение знака 281.
 — тела вращения 217.
 — тетраэдра 20.
Область 40, 88.
 — замкнутая 42.
 — интегрирования, разбиение с помощью прямоугольной сети 180.
 — — разбиение с помощью сети полярных координат 181.
 — многомерная 187—188.
 — ограниченная 260.
 — односвязная (многосвязная) 40, 258, 261, 263.
 — ориентированная 271.
 — открытая 42, 89.
Обратное преобразование 30, 116.
Обратимость преобразования 130—131.
Огибающая 140, 145, 147.
 — интегральных кривых 331.
Односвязная область см. Область.
Однородные функции 96—98.
 — уравнения 27, 28.
Окрестность 41.
Определители 21—38.
Определители преобразования 34—37.
Ориентировка кривой 254.
 — плоской области 277—279.
 — куска поверхности в пространстве 280.
 — трехмерной области 281—282.
 — системы координат 10.
Ортогональность, условие 111, 114.
Основные уравнения механики 105.
Отклонение от положения равновесия 322.
Открытое множество 88.
Отображение 28—34, 115—133.
 — аффинное 28—31.
 — разложение и умножение 31—34, 125—130.
Отрицательная сторона поверхности 280.
Оценка интеграла 186—187.
Падение под углом к горизонту 310—312.
Парабола 142, 145.
Параболоид вращения 44.
 — гиперболический 44, 100.
Параметрическое изображение прямой 17, 168.
 — — поверхности 133—134.
 — — элемента поверхности 222—223.
Переменная интегрирования 184.
Плотность 189.
 — циркуляции 273, 296.
Площадь 231—234, 248.
 — треугольника 18, 19.
 — куска поверхности 218—224.
 — выражение в виде криволинейного интеграла 255.
 — выражение в параметрической форме 222—224.
 — определение знака 277.
Поверхность, заданная в неявной форме 113—115.
 — в параметрической форме 133—134.
 — уровня 46, 114, 336.

- Подъем 53.
 Поле направлений 328.
 Поле скоростей при вращении 79.
 Полная сила источника 272, 293.
 Полный дифференциал 66, 67.
 — интегрирование 255—256.
 Понятие предела в многомерном пространстве 47—50.
 — функции от многих переменных 39—46.
 Полином см. Моногочлен.
 Полярные координаты в пространстве 122.
 — преобразование Δf к полярным координатам 73.
 Преобразование интегралов по области к полярным координатам 206.
 Положительная определенная форма 164.
 — сторона поверхности 280.
 Полуопределенная форма 164.
 Полярный угол 122.
 Полюс 335.
 Порядок дифференцирования 57—60.
 — перехода к пределу для двойных пределов 91—94.
 — величины 50—51.
 — интегрирования 193, 198.
 — исчезания функции 50—52.
 — дифференциального уравнения 320.
 — производной 54.
 Постоянная площадей 317.
 — энергии 319.
 — тяготения 84.
 Потенциал 84, 256, 259, 297, 307.
 — притягивающих масс 334—343.
 — линейный 335—336.
 Потенциальное уравнение 56, 297, 334—343.
 Потенциальная функция 339.
 — энергия 308.
 Поток жидкости см. Стационарный поток.
 Правая система, правый винт 10.
 Правило множителей Лагранжа 154.
 — дифференцирования сложной функции 69.
 — обобщение 71.
 Правильные точки кривой 112.
 Преобразование 28—31, 115—123.
 — аффинное 28—31.
 — к криволинейным координатам 119.
 — к полярным координатам 73, 199, 206.
 — несобственное 132.
 — с помощью обратных радиусов 117.
 — интегралов по области 198—206, 275—276.
 — разложение и умножение 31—34, 125—130.
 — обратимость 130, 131.
 — прямоугольных координат 13.
 — компонент вектора 13.
 Приближенное решение дифференциальных уравнений 325.
 Признак сходимости Коши 87, 90.
 Прimitивное преобразование 32.
 Прimitивная функция 297.
 Прimitивное векторное поле 298, 299.
 Принцип последовательных подразделений 87.
 — предельных точек 86.
 Притяжение масс 228—231.
 — компоненты силы притяжения 230.
 Проекция стереографическая 134—135.
 — теорема о проекциях 12.
 Произведение преобразований 32, 126.
 Производная вектора 79.
 — частная 53.
 — по данному направлению см. дифференцирование
 Пространственная кривая 79.
 Работа 15, 225, 250, 307.
 Равновесие 308—310.
 Равномерная сходимость двойной последовательности 93.
 — — монотонной последовательности функций 95.
 — — несобственных интегралов 239, 240.
 — — критерий 240.
 — непрерывность 88.
 Радиус-вектор 13.
 Радиус кривизны 81.
 Расходимость интеграла 208.
 Ротор векторного поля 84, 296.
 Сарруса правило 22.
 Связность области 40, 41, 260.
 Связная область (связное множество) 88.
 Секториальная скорость 316.
 Семейство кривых 109, 138—145.
 — поверхностей 145—147.
 — зависящее от одного параметра 138.
 — — нескольких параметров 139.
 Сила вихря 273, 274.
 — источника 272, 291.
 — тяготения 83.
 Силовая функция 84.
 Силовой поток 285.
 Система координат 9—10.
 Скалярное поле 78.
 — умножение 14.
 Скорость 305.
 Сложные функции 69—74.
 — дифференцирование 71.
 Сохранение энергии 308.
 Софокусные параболы 118.
 Статический момент 224—226.
 Стационарное значение 150.
 Стационарный поток 271—274, 285—287, 291—293, 299—297.
 Стереографическая проекция 134, 135.
 Стокса теорема 288, 293—297, 300—302.
 — — физическая интерпретация 273—274, 296—297.
 Строфоид 144.

Сходимость интеграла 208.
— — критерий 209, 210.
— равномерная 93, 95, 240.

Тангенциальное ускорение 82.
Тело вращения, объем 216, 217.
— — поверхность 223, 224.
Телесный угол 339.
Тейлора формула 76.
— ряд 77.
Теорема о покрытии 89.
— о среднем значении в дифференциальном исчислении 75, 76.
— — — в интегральном исчислении 185—187.
— — — в теории потенциала 342—343.
Теоремы Гаусса, Грина и Стокса на плоскости 264—271.
— — — в пространстве 287—297.
Теория погрешностей 68, 69.
— потенциала 334—343.
— функций 274.
Точка бесконечности 49, 207—210.
— неопределенности 49.
— перегиба 110.
Трубчатые поверхности 145.
Трансцендентная функция 105.
Тяготение 84, 256.
— постоянная 84.

Угол между двумя кривыми 110, 111, 137.
— — — поверхностями 114.
— телесный 339.
Удельная сила источника 272, 291.
— циркуляция 273, 296.
Узловая точка 169.
Умножение векторов 71.
— скалярное 14.
— определителей 87.
Уравнение плоскости 15, 16.
— — — в параметрической форме 17, 168.

Ускорение 82, 305.
— земной тяжести 306.
Условие интегрируемости 258.
Устойчивое равновесие 309.

Формулы преобразования прямоугольных координат 13.
— — компонент вектора 13, 14.
Фигуры Лиссажу 315.
Функция алгебраическая 43, 105.
— многозначная 42, 43.
— неявная 99.
— рациональная 43.
— трансцендентная 105.
Функциональный определитель 123, 271, 278, 282.

Центр кривизны 81.
Цилиндр 44.
Цилиндронд 50.
Милиндрические координаты 217.
Циркуляция 273, 291.
— удельная 273, 291.

Шар 44, 105, 115, 134, 135, 147, 182—183, 221, 225, 226, 230, 231.

Эквивалентные поверхности 336.
Экстремум 147—168.
— необходимые условия 147—149.
— достаточные условия 163—168.
Элемент поверхности 220, 223.
Элементы орбиты 320.
Эллипсоид 115, 214, 215.
Эллиптический интеграл 176, 324.
Эллиптические колебания 314.
Эйлера теорема об однородных функциях 97.
Энергия положения 308.
— кинетическая 308.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Проф. АМОСОВ С. И., проф. КУЗЬМИН Р. О. доц. НИКОЛЬСКАЯ Н. А. Практический учебник высшей математики, под общей ред. проф. Р. О. Кузьмина (с 85 рис.), стр. 95, ц. 1 руб.

ДУБНОВ Я. С. Задачи и упражнения по дифференциальному исчислению, под ред. проф. И. И. Жегалкина, ИТС Гус рекомендовано в качестве пособия для вузов, изд. 4-е (пособие для высшей школы), стр. 312, ц. 1 р. 60 к.

Проф. ЖЕГАЛКИН И. И. Задачи и упражнения по интегральному исчислению, пособия для вузов, изд. 4-е, 12 л. Печ.

Р. КУРАНТ. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. 1. Функции одного переменного, перев. с нем. Ю. Рабиновича и Б. Лифшица, с предисл. проф. М. Я. Выгодского, изд. 2-е, стереотипн., стр. 444, ц. 3 р. 50 к., пер. 50 коп.

СМИРНОВ В. И. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления. Бесконечные ряды. Аналитическая геометрия. Начала векторного анализа (с 253 черт.), изд. 4-е, просм. и дополн., стр. 467, ц. 4 руб., пер. 40 коп.

СМИРНОВ В. И. Курс высшей математики для техников и физиков, т. II. Комплексные числа. Дифференциальное уравнение. Определенные и кратные интегралы. Основы дифференциальной геометрии. Ряды Фурье. Математическая физика (с 174 черт.), изд. 2-е, просмотр. и дополн., стр. 549, ц. 4 р. 85 к., пер. 65 коп.

Г. ФИЛИПС. Дифференциальное исчисление, перев. и дополн. В. Ф. Когана (с 118 рис.), изд. 2-е, дополн., стр. 320, ц. 3 р., пер. 40 коп.

Г. ФИЛИПС. Интегральное исчисление (с 115 черт.), допущено в качестве руководства для высш. технич. учебн. заведений и в качестве пособия для техникумов, изд. 2-е, стр. 441, ц. 3 р. 75 к., пер. 35 коп.

Заказы направлять во все магазины и отделения
Книгоцентра

